

Diego Maragnano

Vantaggi quantistici e dove trovarli

ABSTRACT: In this paper we explore quantum advantage, the phenomenon where quantum computers outperform classical counterparts in specific tasks, and examine some classical disproofs via efficient algorithms. We then focus on Boson Sampling, Gaussian Boson Sampling, and the demonstration of quantum advantage by Xanadu's Borealis device. We also discuss how recent classical algorithms challenge these results, questioning the boundaries of quantum advantage.

KEY WORDS: Quantum advantage, boson sampling, classical disproof.

RIASSUNTO: Riassunto: In questo articolo esploriamo il vantaggio quantistico, la capacità dei computer quantistici di superare le prestazioni dei computer classici in compiti specifici, e analizziamo alcune confutazioni classiche attraverso algoritmi efficienti. Ci concentriamo poi sul *Boson Sampling*, *Gaussian Boson Sampling* e la dimostrazione di vantaggio quantistico con Borealis di Xanadu. Discutiamo inoltre come alcuni algoritmi classici mettano in dubbio questi risultati, ridefinendo i limiti del vantaggio quantistico.

PAROLE CHIAVE: Vantaggio quantistico, *Boson Sampling*, confutazione classica.

Introduzione

All'inizio degli anni 80 del secolo scorso Yuri Manin e Richard Feynman discussero indipendentemente la possibilità di usare un computer basato sulle leggi della meccanica quantistica, oggi chiamato computer quantistico, per simulare un sistema quantistico, senza specificare come realizzarlo in pratica (Manin, 1980; Feynman, 1982).

Queste pionieristiche considerazioni hanno contribuito alla nascita della computazione quantistica. Negli anni successivi sono stati sviluppati diver-

si modelli di computazione quantistica, tra cui quello circuitale, ed è stato dimostrato che esistono insiemi di porte logiche quantistiche che permettono di implementare qualsiasi circuito quantistico. Per questa ragione, questi insiemi vengono definiti universali. Avendo a disposizione delle porte logiche quantistiche, è possibile sviluppare algoritmi quantistici con l'obiettivo di risolvere problemi specifici in maniera più efficiente dei migliori algoritmi classici, ossia con un minore impiego di risorse a parità di dimensione del problema. Esempi ne sono l'algoritmo di Grover (Grover, 1996), che fornisce un vantaggio quadratico nella ricerca di elementi all'interno di database non strutturati, e l'algoritmo di Shor, che fornisce un vantaggio più che polinomiale nella fattorizzazione di numeri interi (Shor, 1999).

Le *dimostrazioni teoriche* delle migliori performance di questi algoritmi rispetto alle controparti classiche, insieme a molti altri elementi raccolti in anni di ricerca, hanno portato John Preskill nel 2012 a parlare di "supremazia quantistica", termine poi modificato in "vantaggio quantistico" (Preskill, 2012). Un computer quantistico esibisce vantaggio quantistico quando supera le prestazioni dei migliori computer classici che eseguono i migliori algoritmi classici per un compito specifico. Da questa definizione risulta chiaro che una dimostrazione teorica di una migliore performance non è sufficiente per dimostrare il vantaggio quantistico: serve anche una verifica sperimentale di questa migliore prestazione risolvendo un problema altrimenti non risolvibile usando il migliore algoritmo classico sul migliore computer classico. Un esempio in questo senso risale al 2001, quando alcuni ricercatori implementarono correttamente l'algoritmo di Shor su un computer quantistico basato sulla risonanza magnetica nucleare per fattorizzare il numero 15 nei suoi fattori primi 3 e 5 (Vandersypen, 2001). Ciò che manca a questo esperimento per dimostrare vantaggio quantistico è il confronto con i computer classici. Infatti, un computer classico impiega frazioni di secondo per fattorizzare 15 come il prodotto di 3 e 5, e un computer quantistico non potrebbe dimostrare vantaggio quantistico su un problema di dimensione così modesta.

Nonostante un algoritmo come quello di Shor sia promettente per la dimostrazione di vantaggio quantistico, negli anni tali dimostrazioni sono state cercate ed ottenute usando dei computer quantistici "non-universali". Questi computer quantistici non possono risolvere qualsiasi problema tramite un opportuno circuito, ma solo un problema specifico. Esempi di tali problemi sono il *random circuit sampling*, il *quantum annealing*, il *Boson Sampling* ed il *Gaussian Boson Sampling*, per nominarne alcuni.

Tuttavia, le dimostrazioni di vantaggio quantistico per alcuni di questi problemi sono state messe in discussione negli anni successivi.

Nel 2019 i ricercatori di Google dichiararono di aver ottenuto vantaggio quantistico nella risoluzione del *random circuit sampling* con il suo computer quantistico Sycamore (Arute, 2019). Senza entrare nei dettagli del problema, Google dichiarò che Sycamore poteva risolvere un'istanza del problema un milione di volte in circa 200 secondi, mentre il migliore supercomputer classico dell'epoca ci avrebbe impiegato circa 10000 anni. Tuttavia, nel 2022 i ricercatori Feng Pan e Pan Zhang svilupparono un metodo basato su *tensor network*, o reti tensoriali, e riuscirono a replicare i risultati del precedente lavoro di Google in 5 giorni (Pan, Zhang, 2022). Chiaramente 5 giorni sono più di 200 secondi, ma comunque meno dei 10000 anni stimati. Quest'ultimo risultato mise in discussione la precedente dimostrazione di vantaggio quantistico perché venne sviluppato un migliore algoritmo classico per risolvere lo stesso specifico problema su cui si basava il lavoro di Google.

Nell'aprile 2023 Youngseok Kim e colleghi usarono il computer quantistico di IBM "Eagle" per calcolare alcune quantità rilevanti di un particolare modello fisico, chiamato modello di Ising con campo trasverso, attraverso specifiche tecniche di mitigazione del rumore sperimentale (Kim, 2023). In particolare, Kim e colleghi affermarono di poter calcolare queste quantità con alta precisione proprio nei casi in cui i migliori metodi classici (basati su *tensor network* ancora una volta) falliscono. Ebbene, anche questa dimostrazione venne messa in discussione. Nel gennaio 2024 Joseph Tindall e colleghi svilupparono un nuovo metodo basato su *tensor network*, aventi una geometria simile a quella del modello di Ising considerato da IBM, che ottenne una precisione più alta rispetto alla dimostrazione di IBM (Tindall, 2024). Ancora una volta, le *tensor network* misero in discussione un esempio di vantaggio quantistico.

Un altro papabile candidato per la dimostrazione di vantaggio quantistico è l'*annealing* quantistico. L'*annealing* quantistico è uno dei possibili metodi di *annealing*, che prendono il nome da un trattamento termico dell'acciaio chiamato appunto *annealing*, o ricottura in italiano. Questi metodi sono particolarmente utili nel risolvere problemi di ottimizzazione, in cui si cerca il minimo (globale) di una funzione all'interno di un insieme di possibili soluzioni. Evidenze analitiche e numeriche suggeriscono che l'*annealing* quantistico abbia prestazioni migliori della corrispondente versione classica, chiamata *annealing* simulato (Morita, 2008; Santoro, 2006). L'azienda D-Wave ha speso molte energie nello sviluppo di un computer quantistico che implementi l'*annealing* quantistico, con alcuni promettenti risultati (King, 2022). Anche l'azienda giapponese Fujitsu negli anni scorsi ha deciso di dedicarsi a questo problema, sviluppando un dispositivo chiamato *annealer* digitale (a). Questo dispositivo non è un computer quantistico, in quanto basato sulla

tradizionale elettronica digitale, ma è “*quantum-inspired*”: il suo principio di funzionamento è ispirato a quello dei tradizionali computer quantistici, ossia la connettività tra i qubit, il mattone fondamentale alla base del funzionamento dei computer quantistici.

Tirando le fila, sembra che solamente il *Boson Sampling* e il *Gaussian Boson Sampling*, tra i problemi menzionati ad inizio capitolo, non abbiano ancora ricevuto smentite sulle dimostrazioni di vantaggio quantistico. Sarà vero? Scopriamolo insieme in queste note.

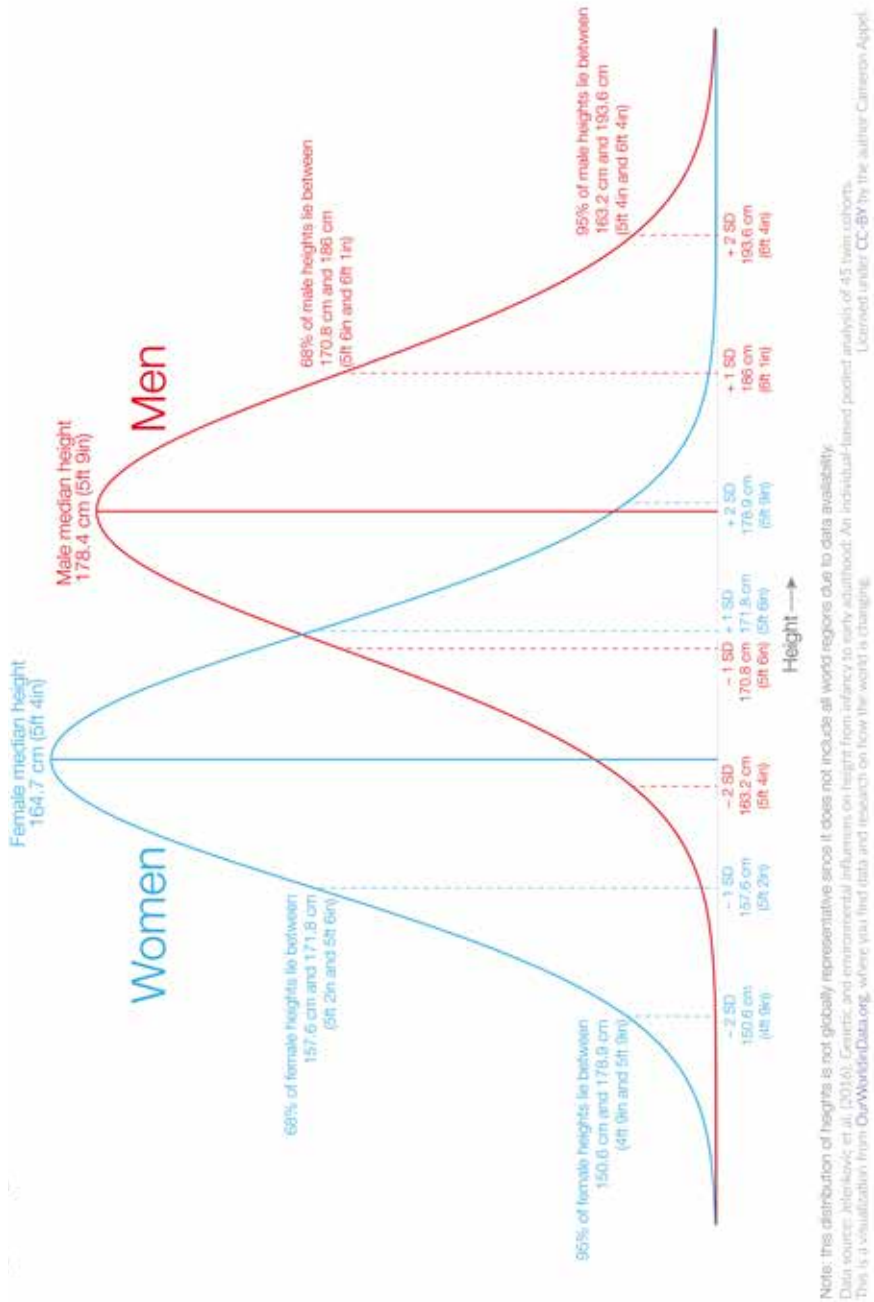
Boson Sampling

Campionamento, bosoni, ed efficienza

Cominciamo dal *sampling*, dal campionamento. Supponiamo di stare studiando un fenomeno che coinvolge una popolazione, ossia un certo numero di individui (oggetti o persone), tipicamente troppo grande per essere studiato nella sua interezza. Ci restringiamo quindi ad un *campione* della popolazione, da cui poi estrapolare informazioni relative alla popolazione intera. Tale campione deve essere rappresentativo della popolazione, ossia deve includere al suo interno quante più sfumature possibili, che si verificano all'interno della popolazione, del fenomeno che si sta studiando. Esistono diversi criteri che permettono di quantificare la bontà di un campione, il più semplice dei quali è la dimensione: più grande è il campione, più affidabili saranno le conclusioni che trarremo dalle nostre analisi.

Per esemplificare, introduciamo l'oggetto matematico che ci accompagnerà per tutte queste note è la distribuzione di probabilità, che ci restituisce la probabilità dei singoli eventi che compongono il fenomeno in esame. Di seguito, omettiamo “di probabilità” ad accompagnamento del termine distribuzione, intendendo sempre che parliamo di una distribuzione di probabilità, quando non diversamente specificato.

Supponiamo ora di voler costruire la distribuzione dell'altezza di un gruppo di persone. Prima di tutto, raccogliamo dati sul campione, ossia misuriamo l'altezza delle persone al suo interno, supponiamo 100 persone. Dividiamo poi le altezze misurate in intervalli, e contiamo quante persone sono all'interno di ciascun intervallo. Per esempio, abbiamo misurato altezze comprese tra 150 cm e 210 cm. Dividiamo in tre intervalli: (150 cm, 170 cm), (171 cm, 190 cm), (191 cm, 210 cm). Nel primo intervallo troviamo 20 persone, nel secondo 50, nel terzo 30 (notiamo che $20 + 50 + 30 = 100$). Calcoliamo ora la probabilità di ciascun intervallo come il rapporto tra il numero di



1. Distribuzione mondiale delle altezze delle persone. (Credits: (b))

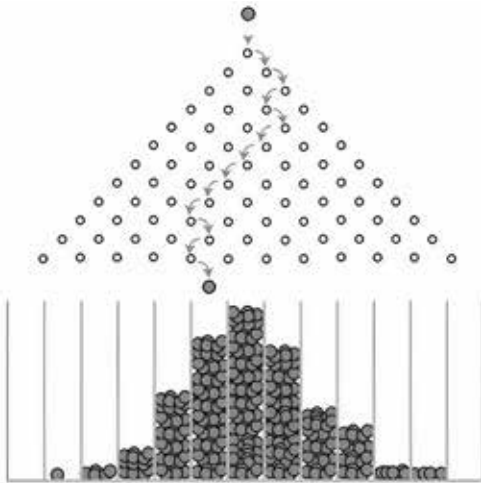
persone dentro l'intervallo e il numero di persone totale all'interno del campione. Quindi, la probabilità di trovare una persona con altezza compresa tra 150 cm e 170 cm sarà $20/100 = 0.2 = 20\%$, e similmente con gli altri due intervalli. Se questo campione è rappresentativo della popolazione, potremo inferire informazioni in merito alla popolazione. In caso contrario, dovremo cercare un campione più rappresentativo prima di proseguire con le analisi.

Guardiamo ora alla distribuzione mondiale delle altezze, riferendoci ai dati in (b) e considerando il genere femminile. Vediamo che la distribuzione è gaussiana (Figura 1), con una media di 164.7 cm ed una deviazione standard di 7.07 cm. Un campione rappresentativo di questa distribuzione conterrà persone la cui altezza nella maggior parte dei casi sarà tra 150.6 e 178.84 cm, e solo in pochi rari casi al di fuori di questo intervallo. Un campione al cui interno troviamo molte persone più basse di 150.6 cm o più alte di 178.84 cm, ma poche all'interno di questo intervallo, è certamente possibile, ma poco probabile e non rappresentativo della popolazione.

Chiamiamo campionatore, o *sampler* in inglese, un dispositivo che effettua un campionamento da una certa popolazione, o equivalentemente da una certa distribuzione.

Un esempio di campionatore è la tavola di Galton (Figura 2). Questa tavola, posizionata verticalmente, consiste di diverse righe di pioli, disposte in modo regolare, sopra cui si trova un foro, da cui vengono fatte cadere delle palline, che vengono raccolte in canali alla fine della tavola, dopo aver attraversato la foresta di pioli. L'obiettivo è determinare la distribuzione della posizione delle palline nei canali finali. A tale scopo possiamo prendere un certo numero di palline identiche, che costituiscono il nostro campione, farle cadere attraverso la tavola, e vedere quante palline finiscono in ogni canale. Se viene fatto cadere un numero di palline sufficientemente grande, la distribuzione che si ottiene è ancora una volta gaussiana. È molto probabile che una pallina finisca in un canale vicino a quello esattamente sotto il foro di entrata, piuttosto che agli estremi della tavola. La tavola di Galton è quindi un campionatore di una distribuzione gaussiana.

Un altro modo di pensare al campionamento è la generazione di numeri casuali secondo una data distribuzione di probabilità. Consideriamo una distribuzione di probabilità uniforme sui numeri interi da 1 a 6, estremi inclusi: ciascuno dei sei numeri è equiprobabile, con probabilità $1/6$. Un dado a sei facce non truccato (lanciato un numero sufficiente di volte) è un buon campionatore di questa distribuzione di probabilità. Consideriamo invece una distribuzione di probabilità sullo stesso intervallo, ma in cui il numero 2 ha probabilità $1/2$ e gli altri numeri $1/10$. In questo caso un dado



2. Rappresentazione schematica di una tavola di Galton. (Credits: <https://ci2.us/post/2020/08/30/galton-machine-and-normal-distribution/>)

regolare non campionerebbe da questa distribuzione di probabilità, ma lo farebbe un dado opportunamente truccato in modo che le probabilità delle facce rispettino quelle ora richieste.

Riassumendo: campionare da una certa distribuzione (di probabilità) significa produrre, estrarre un campione che sia rappresentativo di tale distribuzione (di probabilità).

Veniamo ora ai bosoni. I bosoni sono una delle categorie in cui sono state classificate le particelle elementari con cui spieghiamo la composizione della materia e delle interazioni fondamentali, insieme ai fermioni. I loro nomi rendono omaggio agli scienziati che li studiarono Bose e Einstein per i bosoni, Fermi e Dirac per i fermioni. Per conoscerli meglio, proviamo a confrontarli.

Possiamo pensare a bosoni e fermioni come blocchetti per bambini dotati di comportamenti molto diversi. I bosoni sono dei blocchetti molto amichevoli, possiamo impilarne quanti ne vogliamo sulla stessa mattonella. I fermioni sono dei blocchetti molto esigenti, che non condividono il loro spazio con altri blocchetti: una volta posizionato un fermione su una mattonella, non possiamo posizionare altri fermioni sulla stessa mattonella.

Il comportamento amichevole dei bosoni viene chiamato *bunching*, e può essere osservato sperimentalmente. Infatti, è più probabile trovare bosoni nello stesso posto o rivelarli simultaneamente nello stesso stato quantistico.

Il comportamento un po' schizzinoso dei fermioni viene invece chiamato *anti-bunching*, che significa che i fermioni tendono ad evitarsi e a non condividere lo stesso stato quantistico. La più evidente manifestazione di *anti-bun-*

ching è il principio di esclusione di Pauli, secondo cui appunto due fermioni non possono occupare lo stesso stato quantistico. Questo principio permette di spiegare la struttura degli atomi, in cui gli elettroni (che sono fermioni) possono riempire i livelli energetici senza addensarsi in uno solo.

Infine, parliamo di efficienza. Nel seguito di queste note diremo diverse volte che un problema è/non è risolvibile in maniera efficiente, o che esiste/non esiste un algoritmo per risolvere un problema in maniera efficiente. Frasi di questo tipo si possono quantificare in maniera opportuna usando gli strumenti della teoria della complessità computazionale. Chiamiamo problema computazionale un qualsiasi problema che può essere risolto da un computer attraverso un algoritmo, ossia una sequenza finita di istruzioni. La teoria della complessità computazionale si occupa di studiare e classificare i problemi computazionali in base alla quantità di risorse (ad esempio, tempo o memoria) necessarie per risolverli.

Nell'ambito della complessità computazionale, ciò che interessa è come varia la quantità di risorse necessarie per risolvere un problema al variare della dimensione dello stesso. Vediamo alcuni esempi per capire meglio.

Consideriamo il problema di determinare se un numero è pari o dispari. La dimensione di questo problema è la grandezza del numero considerato: sapere se 4 è pari o dispari è un problema di dimensione 4. La soluzione richiede solamente un'operazione, la divisione per 2, indipendentemente da quanto grande sia il numero considerato: sapere se 4 oppure 46539920 è pari o dispari richiede comunque una sola operazione. La complessità di questo problema non dipende quindi dalla dimensione del problema, da quanto grande è il numero considerato.

Vogliamo ora calcolare la somma di n termini. In questo caso la dimensione del problema è data da n , da quanti termini stiamo sommando. Un algoritmo per risolvere questo problema potrebbe procedere in questo modo: sommare i primi due termini, a cui sommare a sua volta il terzo termine, per poi procedere con il quarto, e così via. Notiamo quindi due fatti: (i) il numero di operazioni è proporzionale ad n , cioè al numero di termini di cui vogliamo calcolare la somma; (ii) il numero di operazioni varia linearmente con n : se passiamo da n a $n+1$ numeri, dovremo fare un'operazione in più. Pertanto, la complessità di questo algoritmo è lineare in n .

Immaginiamo ora di avere una lista di oggetti da portare in vacanza, e una valigia piena di oggetti. Prima di partire dobbiamo assicurarci che tutti gli oggetti della lista siano in valigia. La dimensione del problema è uguale al numero di elementi della lista, a sua volta uguale al numero di oggetti in valigia, e la indichiamo con n . Se vogliamo risolvere questo problema

con un computer (per nostra pigrizia), un algoritmo potrebbe procedere nel modo seguente. Legge il primo elemento della lista, e controlla tutti gli oggetti in valigia uno per uno: se trova l'oggetto cercato, invia un messaggio di conferma, mentre se non lo trova, manda un messaggio di errore. Fatto questo, passa al secondo elemento della lista, passa in rassegna tutti gli oggetti in valigia per vedere se è presente o meno, e così via fino all'ultimo elemento della lista. Questo algoritmo userà quindi n^2 operazioni per risolvere il problema. La complessità di questo algoritmo è quindi quadratica in n .

In generale, la teoria della complessità computazionale raccoglie i problemi la cui complessità computazionale è polinomiale nella dimensione del problema in una classe chiamata "P", che sta per "*polynomial time*". Per i problemi nella classe P è possibile trovare un algoritmo che li risolve in tempo polinomiale: in questo senso intendiamo che si possono risolvere in modo efficiente.

I problemi al di fuori della classe P sono problemi più difficili da risolvere, nel senso che la complessità computazionale degli algoritmi per risolverli varia in maniera più che polinomiale rispetto alla dimensione del problema.

Supponiamo di provare ad indovinare una password composta di sole cifre, e di lunghezza tre. La dimensione di questo problema è la lunghezza della password. Un algoritmo potrebbe procedere in questo modo: provare tutte le $10^3=1000$ possibili password. In generale, se la password ha lunghezza n , le possibili password sono 10^n , un numero che diventa grande molto velocemente all'aumentare di n . Un algoritmo di questo tipo ha una complessità computazionale che è esponenziale in n .

Infine, immaginiamo di voler trovare tutti i possibili ordinamenti, o permutazioni, di un insieme di oggetti. Consideriamo l'insieme (1,2,3): tutte le possibili permutazioni sono le seguenti sei: (1,2,3), (1,3,2), (2,1,3), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1). Dato un insieme di n elementi, il numero di tutte le possibili permutazioni è $n!$, il fattoriale di n . Pertanto la complessità computazionale dell'algoritmo usato è fattoriale in n .

Avendo introdotto tutti gli elementi necessari, siamo ora pronti per addentrarci nel mondo del *Boson Sampling*.

Boson Sampling: la teoria

Il *Boson Sampling* (BS) è un problema computazionale che richiede di campionare dalla distribuzione di output di un sistema di n bosoni non-interagenti dopo un'evoluzione attraverso una rete lineare. Il calcolo della probabilità di una specifica configurazione di output è legato al calcolo del per-

manente di una sottomatrice della matrice che descrive la rete lineare¹. Ci sono buone ragioni per ritenere che il calcolo (anche solo approssimativo) di tale quantità sia un problema difficile da risolvere su un computer classico. Di conseguenza, anche il BS è fortemente ritenuto un problema di difficile risoluzione per un computer classico.

D'altro canto, i fotoni possono risolvere naturalmente un problema di BS. Infatti, è sufficiente iniettare alcuni (almeno 2) fotoni in un interferometro ottico, lasciarli propagare all'interno dello stesso, ed infine rivellarli all'uscita, e campionare le configurazioni di output.

Per questi motivi il BS è ritenuto uno dei più promettenti candidati per una dimostrazione inequivocabile di vantaggio quantistico.

Ci sono diverse domande che possiamo porci a questo punto. Qualcuno ha mai verificato sperimentalmente che i fotoni risolvano davvero il BS? Ci sono state dimostrazioni di vantaggio quantistico basate sul BS?

Cercheremo di rispondere a queste domande del resto del capitolo.

Per introdurre il BS vero e proprio, riprendiamo la tavola di Galton. Questa può essere vista come un rudimentale calcolatore, o computer: ma di cosa? Cominciamo chiamando questo calcolatore GALTON. L'input di GALTON è la disposizione esatta dei pioli. L'output di GALTON è un campione della distribuzione del numero di palline sui canali in uscita, *i.e.*, il numero di palline finite in ciascuno dei canali di uscita per una specifica istanza del problema (ossia una singola caduta di n palline).

Facciamo un esempio: consideriamo una tavola di Galton con tre righe di pioli. L'input di Galton è la disposizione esatta di questi pioli: sono disposti a piramide, con il primo piolo esattamente sotto il foro di entrata, e le righe successive simmetriche rispetto al foro di entrata. L'output è un campione della distribuzione del numero di palline sui 4 canali in uscita. Se abbiamo lanciato 1000 palline, ne troveremo circa 125 in ciascuno dei canali agli estremi, e circa 375 in ciascuno dei due canali centrali. Alternativamente, l'output di Galton sarà la probabilità che una pallina finisca in uno dei canali in uscita, come rapporto tra numero di palline finite nel canale e numero di palline totali. Per ciascuno dei canali agli estremi sarà $125/1000 = 0.125$, mentre per ciascuno di quelli centrali sarà $375/1000 = 0.375$.

¹ Una matrice A è una tabella ordinata di elementi, organizzati in righe e colonne. Una sottomatrice di A si ottiene eliminando alcune righe e colonne di A , non necessariamente dello stesso numero. Alternativamente, si ottiene prendendo gli elementi dell'intersezione di alcune righe e colonne di A .

Come trasformiamo un esperimento con GALTON, classico, in un esperimento di BS, quantistico? Dobbiamo fare le seguenti sostituzioni:

1. Aumentiamo il numero di fori di entrata, non più solo uno, ma $M > 1$, e li chiamiamo modi di entrata, o modi di input.
2. Le n palline identiche diventano n bosoni indistinguibili. Per semplicità, e per coerenza con quanto vedremo successivamente, consideriamo fin da subito n fotoni indistinguibili.
3. La foresta di pioli viene sostituita da un interferometro ottico lineare.
4. Il numero dei canali di uscita, o modi di output, è uguale al numero M di modi di input.
5. In corrispondenza di ciascun modo di output è presente un opportuno fotorivelatore che conta quanti fotoni sono finiti nel modo corrispondente.

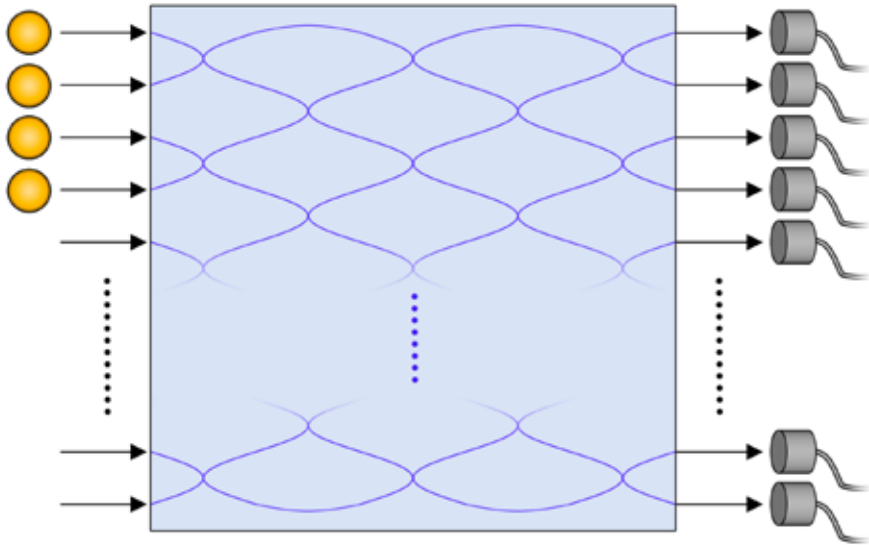
Analizziamo più in dettaglio i vari elementi introdotti in questo elenco.

In ciascun modo di input viene iniettato al più un singolo fotone. A volte si inietta un fotone in ciascun modo di input, altre volte alcuni modi vengono lasciati vuoti senza iniettare alcun fotone. Per descrivere matematicamente l'input possiamo usare una lista di M numeri $I = (i_1, i_2, \dots, i_M)$, in cui ciascun elemento della lista indica il numero di fotoni che vengono iniettati in quel modo. Ad esempio, se consideriamo 5 modi di input, la lista $(1, 0, 1, 0, 1)$ indica che nei modi 1, 3, e 5 viene iniettato un singolo fotone, mentre nei modi 2 e 4 non viene iniettato alcun fotone².

Una volta iniettati, i fotoni si propagano attraverso un interferometro ottico lineare. Un interferometro ottico è uno strumento attraverso cui la luce si propaga, motivo per cui viene chiamato anche circuito fotonico, per ottenere fenomeni di interferenza. La luce entra, si propaga, ed esce dall'interferometro tramite delle guide d'onda, che possiamo pensare analoghe alle tradizionali fibre ottiche. Un interferometro ottico si dice lineare se è composto solamente di specifici componenti ottici, ossia *beam splitter* e sfasatori. Per il prosieguo della discussione ci basta sapere che un interferometro ottico lineare con M modi di input e output è descritto matematicamente da una matrice unitaria³ U con M righe e M colonne. In linea di principio, la struttura dell'interferometro (e di conseguenza il valore dei coefficienti della

² Tipicamente, si richiede che il numero totale di fotoni iniettati sia molto minore del numero di modi dell'interferometro, per rendere piccola la probabilità di rivelare più di un fotone per ciascun modo di output.

³ Una matrice unitaria è una matrice a coefficienti complessi con alcune proprietà aggiuntive.



3. Schema di un tipico esperimento di BS. A sinistra i fotoni, rappresentati come sfere arancioni, vengono iniettati nell'interferometro ottico lineare, rappresentato dal rettangolo azzurro al centro. A destra si trovano i fotorivelatori per contare il numero di fotoni in ciascun modo. (Credits: <https://quantum-journal.org/papers/q-2019-08-05-169/>)

matrice unitaria che lo descrive) deve essere scelta casualmente, per evitare di usare solo particolari strutture per cui la soluzione del problema potrebbe essere troppo semplice.

I fotorivelatori presenti all'uscita dell'interferometro contano quanti fotoni arrivano in ciascun modo. Questi fotorivelatori riveleranno un numero di fotoni uguale al numero di fotoni in ingresso, a meno di averne persi alcuni durante la propagazione all'interno dell'interferometro. Descriviamo matematicamente una configurazione di output tramite una lista di M numeri $O=(o_1, o_2, \dots, o_M)$, in cui ciascun elemento della lista indica il numero di fotoni rivelati in quel modo. Per esempio, la lista $(0, 0, 1, 1, 1)$ indica che nei modi 3, 4, e 5 è stato rivelato un fotone, mentre nei modi 1 e 2 non è stato rivelato alcun fotone.

In Figura 3 viene riportato uno schema di un tipico esperimento di BS.

Una struttura come quella appena descritta può essere considerata un calcolatore, che chiameremo BOSTON. In analogia con questo visto per la tavola di Galton, l'input di BOSTON è composto dalla matrice che descrive l'interfe-

rometro, e dalle liste che descrivono l'input e l'output. L'output prodotto da BOSTON è un campione della distribuzione del numero di fotoni nei modi di output, *i.e.*, il numero di fotoni rivelati in ciascuno dei modi di output per una specifica istanza del problema (ossia una singola iniezione di n fotoni).

Nel caso di BOSTON non si parla più solo di probabilità di una configurazione di output, ma di probabilità di una configurazione di output per una data configurazione di input. Tale probabilità è proporzionale al (quadrato del modulo del) permanente di una particolare matrice che chiamiamo $U_{I,O}$. $U_{I,O}$ è una sottomatrice della matrice unitaria U che descrive l'interferometro, determinata utilizzando l'informazione contenuta nella configurazione di input I e output O .⁴ Notiamo che, nel caso in cui non venga rivelato più di un fotone per ciascun modo di output (ossia, il numero di fotoni rivelati in ciascun modo è 0 oppure 1), $U_{I,O}$ avrà tante righe e colonne quanto il numero totale di fotoni iniettati. Usando le configurazioni di input e output degli esempi precedenti $U_{I,O}$ sarà una matrice con 3 righe e 3 colonne.

Il permanente di una matrice si trova attraverso una serie di operazioni sugli elementi di matrice. Ad esempio, per una matrice con 2 righe e 2 colonne:

$$\text{Permanente di } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad + bc.$$

Se la matrice è a coefficienti reali non-negativi, il permanente si può approssimare in maniera efficiente tramite un algoritmo classico. Ma $U_{I,O}$ è una matrice a coefficienti complessi, e il calcolo del corrispondente permanente, anche solo in modo approssimato (*i.e.*, anche ammettendo un certo errore nel calcolo), è un problema che non si può risolvere in modo *efficiente* con un computer classico⁵.

Si può quindi definire il BS come il problema di campionare, in modo esatto o approssimato, della distribuzione di output del calcolatore BOSTON. Inoltre BOSTON, o più in generale qualsiasi *boson sampler*, è a tutti gli effetti un computer quantistico non-universale, perché può effettuare solo un

⁴ Più precisamente, la matrice si costruisce nel seguente modo. Data la matrice U e le configurazioni di input e di output, $U_{I,O}$ si ottiene prendendo i_k volte la k -esima colonna di U e j_k volte la k -esima riga di U . Usando le stesse configurazioni del testo principale, $U_{I,O}$ si ottiene selezionando la prima, la terza, e la quinta colonna, e poi la terza, la quarta, e la quinta riga di U .

⁵ Dal punto di vista della teoria della complessità computazionale, il calcolo del permanente di matrici a coefficienti complessi è un problema $\#P$ -completo. Questo è vero anche per matrici a coefficienti reali non-negativi, ma in questo caso un algoritmo per un calcolo approssimato in tempo polinomiale esiste.

compito, campionare dalla distribuzione di output una volta specificate la configurazione di input e la struttura dell'interferometro.

Abbiamo detto che il calcolo della probabilità di una configurazione di output di BOSON non si può risolvere in modo efficiente con un computer classico. Questa considerazione è valida in generale anche per il BS? Questa è la domanda che si sono posti Aaronson e Arkhipov, arrivando a due risultati (Aaronson, Arkhipov, 2001). Il primo è che il BS non si può risolvere in modo efficiente tramite un computer classico. In altri termini, non esiste un algoritmo classico che “in un tempo ragionevole” campioni dalla distribuzione di output di BOSON. Il secondo risultato è che anche una soluzione approssimata del BS in modo efficiente non è possibile.

Aaronson e Arkhipov dimostrano che il BS è un problema non risolvibile in modo efficiente a patto che siano valide due congetture. Si tratta di due affermazioni di natura prettamente matematica in merito al calcolo del permanente, di cui gli autori portano numerose evidenze che siano vere, ma senza fornire una dimostrazione rigorosa. Pertanto, è più opportuno dire che si crede fortemente, o ci sono buone ragioni per ritenere, che il BS sia un problema non risolvibile in modo efficiente tramite un computer classico.

Aaronson e Arkhipov discutono anche perché il BS sia un problema interessante dal punto di vista sperimentale.

Dal punto di vista delle sorgenti, oggi esistono diversi modi per generare e iniettare singoli fotoni all'interno di un circuito fotonico come un interferometro ottico lineare. Due strategie vengono comunemente utilizzate in questo contesto. La prima è rappresentata dai quantum dot, che possono generare direttamente singoli fotoni se opportunamente eccitati tramite impulsi laser. La seconda è rappresentata dalle cosiddette sorgenti di singoli fotoni “*heralded*”: prima vengono generate coppie di fotoni altamente correlati attraverso opportuni processi ottici nonlineari; poi, se viene rivelato uno dei due fotoni della coppia, le correlazioni tra i due permettono di “annunciare” che anche il secondo è stato prodotto.

Per quanto riguarda il circuito fotonico, diverse tecnologie sono disponibili per progettare e realizzare circuiti fotonici praticamente arbitrari, tra cui interferometri ottici lineari come quelli utilizzati nel BS. Esistono diversi materiali, e conseguentemente diverse tecniche di fabbricazione, per i circuiti fotonici. I materiali più comunemente utilizzati sono silicio (Si), nitruro di silicio (SiN), silice (SiO₂), arseniuro di gallio (GaAs), e niobato di litio (LiNbO₃). Le tecniche più diffuse sono la fotolitografia e il *femtosecond laser micro-machining*, la cui scelta varia anche in base al materiale che si sta utilizzando.

Infine, i fotoni all'uscita dell'interferometro possono essere rivelati in

maniera molto precisa. Disponiamo infatti sia di rivelatori che possono rivelare solo se i fotoni sono arrivati o no, senza contare il numero, sia di rivelatori che possono contare esattamente quanti fotoni arrivano di volta in volta.

È importante sottolineare che questo tipo di esperimenti oggi sono realizzabili grazie allo sviluppo e alla maturazione della piattaforma fotonica negli anni, che ha migliorato la qualità e le prestazioni delle singole parti necessarie per realizzare un esperimento (tutt'altro che banale) come quello di BS. Per una visione più ampia e dettagliata delle implementazioni fotoniche del BS rimando all'ottimo articolo di rassegna di Brod e colleghi (Brod, 2019) e all'elemento (c) della sitografia.

A questo punto una domanda sorge spontanea: come facciamo a verificare sperimentalmente il BS? Vale a dire, qual è una possibile procedura per la verifica sperimentale del BS?

In sintesi, un esperimento di BS procede in questo modo:

1. Si costruisce un interferometro ottico lineare e si determina la corrispondente matrice unitaria U che lo descrive.
2. Si sceglie una configurazione di input I , equivalente a scegliere i modi di input in cui iniettare i singoli fotoni.
3. Si calcola la probabilità di ciascuna configurazione di output O compatibile con la configurazione di input scelta attraverso la procedura descritta sopra.
4. Si iniettano i fotoni nel circuito, secondo la configurazione di input scelta, e si conta quanti fotoni sono stati rivelati in ciascun modo di output.
5. Si ripete il punto 4 N volte per raccogliere le frequenze sperimentali di ciascuna configurazione di output.
6. Si calcolano le probabilità sperimentali di ciascuna configurazione di output dividendo il numero di volte che una certa configurazione è stata osservata per il totale di ripetizioni N . Un semplice esempio per provare a capire: se ripetiamo l'esperimento $N=100$ volte e la configurazione $(0,0,1,1,1)$ viene osservata 12 volte, allora la probabilità sperimentale di tale configurazione sarà $12/100 = 0.12$.
7. Per concludere, si produce un grafico in cui si confrontano le probabilità teoriche con quelle sperimentali.

Le probabilità teoriche calcolate nel punto 3 sono necessarie solo per l'ultimo punto del protocollo, in cui le si confronta con quelle determinate sperimentalmente.

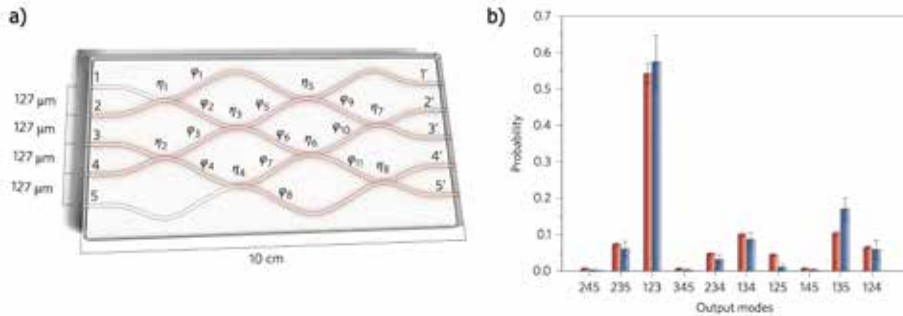
I punti 4 e 5 rappresentano l'operazione di campionamento dalla distribuzione di probabilità di output del circuito considerato. Il confronto tra la distribuzione di probabilità teorica e quella sperimentale permette di verifica-

re se stiamo effettivamente campionando dalla distribuzione di probabilità di output del circuito preso in esame. Se i campioni raccolti sperimentalmente seguono una distribuzione di probabilità simile a quella calcolata teoricamente, allora stiamo campionando correttamente, e “risolviamo” un’istanza del BS.

Boson Sampling: realizzazioni sperimentali

Negli anni sono state realizzate diverse implementazioni sperimentali di BS seguendo lo schema appena riportato. Si potrebbero spendere ore parlando di ciascuna delle implementazioni sperimentali che vedremo, analizzando le specifiche modalità e strategie adottate per effettuare esperimenti sempre più precisi ed innovativi. Tuttavia, quello che mi preme fare in queste note è mostrare alcuni risultati sperimentali in cui vengono applicati i passi riportati nell’elenco precedente, e che dimostrano che una realizzazione sperimentale del BS è non solo possibile, ma produce esiti positivi.

Vediamo dunque un esempio di risultato sperimentale, tratto dal lavoro di Tillmann e colleghi (Tillmann, 2013). Ci tengo a precisare fin d’ora, come d’altronde fanno gli autori dell’articolo, che nello stesso periodo sono stati pubblicati altri tre lavori (Crespi, 2013; Broome, 2013; Spring, 2013) in cui per la prima volta, in base alle mie conoscenze, viene dimostrato sperimentalmente il BS. Ho scelto di discutere e mostrare i risultati di (Tillmann, 2013) per mio gusto personale, non perché abbiano una valenza scientifica più elevata degli altri, altrettanto valevoli di essere letti e studiati. In Figura 4a) viene mostrato uno schema del circuito fotonico usato da Tillmann e colleghi. Si tratta di un interferometro con 5 modi di input e altrettanti di output, in cui vengono iniettati 3 fotoni. Le possibili configurazioni di output per 3 fotoni in 5 modi sono 10. Per ciascuna di queste configurazioni di output, appaiata alla configurazione di input scelta, si calcola la probabilità teorica (legata al calcolo del permanente come visto in precedenza), e poi se ne fa una stima sperimentale, secondo i passaggi indicati nello schema alla fine del paragrafo precedente. Il confronto tra la probabilità teorica e sperimentale delle possibili configurazioni di output iniettando i fotoni nei modi 1, 2, e 4 è mostrato in Figura 4b). Sull’asse orizzontale sono riportate le dieci possibili combinazioni di output (i tre numeri di ciascuna colonna indicano i modi in cui i fotoni vengono rivelati). Sull’asse verticale è indicata la probabilità di ciascuna configurazione. C’è una netta somiglianza tra le due distribuzioni di probabilità, che sono quasi sempre compatibili entro le barre d’errore. Questa somiglianza viene quantificata tramite un coefficiente, chiamato fedeltà, che varia da 0% a 100%. Per queste due specifiche distribuzioni, il valore di



4. Dimostrazione sperimentale di BS. a) Schema di uno degli interferometri utilizzati da Tillmann e colleghi per dimostrare sperimentalmente il BS. Si tratta di un interferometro a 5 modi di input e 5 di output, in cui vengono iniettati 3 singoli fotoni. I simboli ϕ e η rappresentano i parametri dei componenti ottici che compongono il circuito; cambiandone i valori, si ottiene un circuito diverso. b) Confronto tra la distribuzione teorica e quella sperimentale sui modi di output iniettando fotoni nei modi 1, 2, e 4. La fedeltà tra le due distribuzioni è 98%. (Credits: (Tillmann, 2013))

fedeltà è del 98%: possiamo pertanto concludere che stiamo correttamente campionando dalla distribuzione di output del circuito. Tillmann e colleghi analizzano poi altre configurazioni, cambiando sia il circuito sia i modi in cui vengono iniettati i fotoni, I risultati mostrano fedeltà tra la distribuzione teorica e sperimentale sistematicamente maggiori di 95%.

Passiamo brevemente in rassegna gli altri tre lavori pionieristici, mostrando le principali differenze e/o somiglianze con quello appena visto. Nell'articolo di Crespi e colleghi (Crespi, 2013) viene utilizzato ancora un interferometro a 5 modi iniettando 3 fotoni. Tuttavia, in questo lavoro si tiene anche conto della parziale distinguibilità dei fotoni nel calcolo delle probabilità sperimentali. Broome e colleghi (Broome, 2013) aumentano il numero di modi a 6, e il BS viene studiato iniettando 2 e 3 fotoni. Nel lavoro di Spring e colleghi (Spring, 2013) l'interferometro è ancora una volta a 6 modi, ma si iniettano 3 e 4 fotoni.

Negli anni successivi molti lavori, sia teorici che sperimentali, sono stati prodotti per proseguire lo studio del BS in diverse direzioni. In primo luogo, come nelle referenze precedenti, si è studiato il BS su diverse piattaforme fotoniche, variando il numero dei modi e dei fotoni (Spagnolo, 2014; Wang, 2017; Wang, 2018; Wang, 2019; Gao, 2019; Carosini, 2024). Sono state studiate anche alcune varianti, come la versione *scattershot* e quella nonlineare (Bentivegna, 2015; Spagnolo, 2023). Un altro studio che è stato condotto in alcuni dei lavori appena citati riguarda la validazione del campionatore

preso in esame, con l'obiettivo di verificare che la distribuzione sperimentale ottenuti dal campionatore preso in esame non fosse compatibile con distribuzioni di probabilità generate da campionatori classici alternativi. Ad esempio, un campionatore uniforme che genera eventi secondo una distribuzione uniforme sulle configurazioni di output (*i.e.*, tutte le configurazioni di output hanno la stessa probabilità), oppure un campionatore che inietta fotoni distinguibili nel circuito.

Boson Sampling e vantaggio quantistico

Le differenze principali tra le varie implementazioni sperimentali menzionate nel paragrafo precedente, al di là delle specificità tecniche legate alla generazione dei singoli fotoni o alla progettazione dell'interferometro, sono il numero di fotoni iniettati nel circuito e il numero di modi del circuito fotonico. Inoltre in ciascuno dei lavori menzionati viene fatto il confronto tra la distribuzione di probabilità sperimentale e teorica: ciò significa che è stato possibile calcolare la distribuzione teorica, nonostante il calcolo del permanente di matrici complesse sia ritenuto un problema difficile da risolvere per un computer classico. È dunque lecito chiedersi se il BS dimostri il vantaggio quantistico oppure no.

A mio modo di vedere il BS non è, al momento, il problema migliore per una dimostrazione di vantaggio quantistico. Il motivo di questa affermazione si trova leggendo le osservazioni sui lavori sperimentali fatte poco sopra con il protocollo stesso del BS. La probabilità di una configurazione di output si trova calcolando il permanente di una matrice $U_{l,o}$, la cui dimensione è determinata dal numero totale di fotoni iniettati nel circuito. Pertanto, se consideriamo circuiti via via più grandi aumentando il numero di modi, certamente la corrispondente matrice unitaria U sarà più grande. Tuttavia, se non aumentiamo il numero di fotoni, la dimensione di $U_{l,o}$ non aumenterà, il calcolo del relativo permanente rimarrà fattibile (seppur non in modo efficiente) tramite un computer classico, e non aumenterà la complessità del problema. Allo stato attuale della ricerca e della maturazione di questo tipo di piattaforma, aumentare la dimensione del circuito è fattibile (come si vede anche dai lavori citati in precedenza), ma iniettare più fotoni è complicato per diverse ragioni, tra cui il mantenimento dell'indistinguibilità tra tutti i fotoni e la rivelazione di un numero sempre maggiore di fotoni.

Gli esperimenti di BS sono quindi certamente interessanti e meritevoli di essere studiati, sia dal punto di vista della tecnologia che dei fondamenti, ma forse non ancora pronti per una dimostrazione di vantaggio quantistico.

Infine, dal lato teorico della ricerca provengono indicazioni su quale sia la dimensione necessaria per dimostrare vantaggio quantistico. Come detto

nell'introduzione, un computer quantistico dimostra vantaggio quantistico quando ottiene prestazioni migliori del migliore algoritmo classico, eseguito sul migliore computer classico, nel risolvere un problema specifico. Ne consegue che se un computer classico può risolvere un problema fino ad una certa dimensione limite in modo efficiente, allora per dimostrare vantaggio quantistico un computer quantistico dovrà risolvere quel problema ancora in modo efficiente, ma ad una dimensione maggiore di quella limite per il computer classico.

In questo senso, una possibile dimensione limite classica per il BS viene proposta da Neville e colleghi (Neville, 2017). In questo lavoro, si dimostra come un algoritmo classico opportunamente progettato sia in grado di risolvere istanze di BS con 30 fotoni e una matrice unitaria casuale⁶ in mezz'ora su un laptop tradizionale, e si stima che possa risolvere istanze a 50 fotoni in meno di 10 giorni se eseguito su un supercomputer (in particolare, il supercomputer cinese Tianhe-2). Questo lavoro spinge un po' più in là il limite da raggiungere per dimostrare vantaggio quantistico tramite BS, rendendo la vita del BS ancora meno facile di quanto già non sia.

Avendo analizzato il BS come primo candidato (tra i due considerati in queste note) per dimostrare vantaggio quantistico, dobbiamo passare ora al secondo. Nonostante il nome sia simile, il *Gaussian Boson Sampling* rivelerà non poche sorprese lungo il cammino.

Gaussian Boson Sampling

Gaussian Boson Sampling: teoria

Il *Gaussian Boson Sampling* (GBS) è una variante del BS, come si può facilmente immaginare dal nome, introdotta nel 2017 da Hamilton e colleghi (Hamilton, 2017) e studiata più approfonditamente da Kruse e colleghi (Kruse, 2019). In quanto variante del BS originale, avrà delle somiglianze e delle differenze rispetto all'originale. Esploriamole brevemente.

L'aggettivo "gaussiano" in questo contesto si riferisce allo stato della luce che viene iniettata nell'interferometro. Facciamo un passo indietro e apriamo una brevissima parentesi sugli stati quantistici e le loro rappresentazioni. Lo stato di un sistema quantistico può essere rappresentato in diversi modi. La più famosa, anche grazie alla divulgazione sull'argomento, è la funzione

⁶ Più precisamente, la matrice unitaria deve essere scelta secondo la distribuzione di Haar.

d'onda, la quale può essere opportunamente manipolata per ottenere un'altra rappresentazione dello stato, chiamata funzione di Wigner. Se questa funzione ha una forma gaussiana, allora si dice che lo stato quantistico è gaussiano. Inoltre, gli stati gaussiani possono essere caratterizzati da una specifica matrice chiamata matrice di covarianza.

La prima differenza tra il GBS e il BS è che nel GBS vengono iniettati nell'interferometro stati di luce gaussiani, ossia stati la cui funzione di Wigner è gaussiana.

Come si ottengono questi stati di luce in pratica? La soluzione più comune è utilizzare gli stati di luce *squeezed*, che sono profondamente diversi dai singoli fotoni del BS originale. Sugli stati *squeezed* sono stati scritti fiumi d'inchiostro, sulle strategie per generarli e manipolarli, e sulle possibili applicazioni (una su tutte, presso gli interferometri LIGO e VIRGO utilizzati per rivelare le onde gravitazionali). Questi argomenti esulano dallo scopo di queste note, focalizzate sul tema del vantaggio quantistico senza entrare in eccessivi dettagli tecnici e tecnologici delle specifiche realizzazioni. In sintesi e semplificando, diciamo che questi stati sono "*squeezed*" rispetto ad un altro stato di luce, chiamato stato di vuoto, in cui non sono presenti fotoni. Il parametro che quantifica "quanto è *squeezed* uno stato *squeezed*" (perdonate il gioco di parole) è chiamato parametro di *squeezing*. Quando diciamo che in un modo dell'interferometro viene iniettato uno stato di luce *squeezed*, possiamo pensare ad un impulso di forma gaussiana che entra nell'interferometro, contenente al suo interno un numero di fotoni proporzionale al parametro di *squeezing*.

La seconda differenza tra il GBS e il BS è nella formula per calcolare la probabilità di una configurazione di output. Questa probabilità dipende ancora dalle configurazioni di input e output, ma in modo diverso. Consideriamo un interferometro con M modi descritto da una matrice unitaria U , e iniettiamo uno stato gaussiano in ciascun modo. La configurazione di input è identificata da una lista $s = (s_1, s_2, \dots, s_M)$ contenente i valori dei parametri di *squeezing* di ciascuno stato. Equivalentemente, lo stato di input complessivo è descrivibile tramite una matrice di covarianza di dimensione $2M \times 2M$. Indichiamo la configurazione di output dei fotoni rivelati dopo aver attraversato l'interferometro con la lista $\underline{n} = (n_1, n_2, \dots, n_M)$, per un totale di n fotoni rivelati. Sotto opportune ipotesi sugli stati di input⁷, la probabilità della configurazione di output si trova attraverso il calcolo dell'hafniano di

⁷ L'ipotesi è che gli stati di input siano stati di vuoto *squeezed*, a singolo modo, puri, e indistinguibili.

una particolare matrice che chiamiamo B_n . Questa matrice B_n si ricava da una prima matrice B , ottenuta manipolando opportunamente la matrice U e i parametri di *squeezing*, di cui si selezionano opportunamente alcune righe e colonne⁸. Tale matrice B_n sarà di dimensione $2n \times 2n$, e avrà quindi tante righe e colonne quante il doppio del numero di fotoni rivelati. Infine, l'hafniano è una generalizzazione del permanente, e proprio come il permanente è una quantità il cui calcolo non è un problema risolvibile in modo efficiente tramite un computer classico⁹.

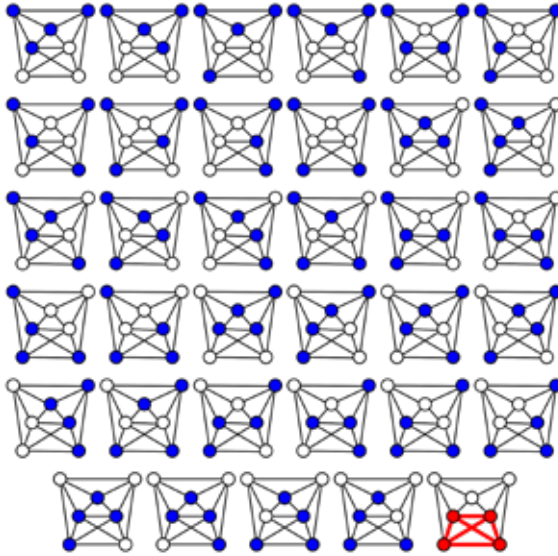
Quindi, una seconda differenza che emerge da questa analisi è che il GBS si basa sul calcolo dell'hafniano al posto del permanente, e la matrice di cui si calcola l'hafniano è costruita con una procedura diversa rispetto a quella del BS.

Un'analogia interessante è nel ruolo che le congetture hanno nella dimostrazione della complessità dei due problemi. Come Aaronson e Arkhipov in (Aaronson, Arkhipov, 2001) formulano due congetture, di cui portano varie evidenze, per dimostrare la complessità del BS, altrettanto fanno gli autori di (Hamilton, 2017; Kruse, 2019) per il GBS. In ulteriore analogia, le congetture vengono giustificate euristicamente, ma senza fornire una dimostrazione rigorosa. Pertanto, anche per il GBS è più corretto dire che si ritiene fortemente che sia un problema non risolvibile in modo efficiente da un computer classico.

La procedura di verifica sperimentale del GBS è, di fatto, identica a quella del BS. A patto di fare le dovute modifiche legato agli stati gaussiani e al calcolo dell'hafniano, si tratta ancora una volta di confrontare le probabilità teoriche, calcolate a partire dalla la configurazione di input e la matrice unitaria dell'interferometro, e le probabilità sperimentali, ottenute ripetendo molte volte l'esperimento. È importante notare che questa verifica di corretta operazione del dispositivo, a volte chiamato *gaussian boson sampler* per brevità, è possibile fintanto che l'hafniano è calcolabile in tempi ragionevoli. I casi in cui questo non è possibile sono molto interessanti, perché aprono le porte al regime in cui si può effettivamente dimostrare vantaggio quantistico, ma allo stesso tempo questa dimostrazione richiede strumenti diversi dal confronto tra distribuzioni di probabilità. Teniamolo a mente, ci servirà più avanti.

⁸ Più precisamente la matrice B è data da $B=U \text{diag}(s_1, \dots, s_M)U^T$. La matrice B_n si ottiene prendendo n_i volte la i -esima riga e la $i+M$ -esima colonna di B .

⁹ Si dimostra che l'hafniano appartiene alla stessa classe di complessità computazionale del permanente, ossia la classe dei problemi #P-completi.



5. Grafo a 7 vertici con tutti i possibili sottografi di 4 vertici (evidenziati in blu), di cui uno solo è una cricca (evidenziata in rosso). (Credits: https://en.wikipedia.org/wiki/Clique_problem#/media/File:Brute_force_Clique_algorithm.svg)

Gaussian Boson Sampling: applicazioni

Prima di proseguire, poniamoci questa domanda: se anche avessimo un *gaussian boson sampler* che esibisce vantaggio quantistico, per cosa potremmo usarlo “in pratica”?

Esistono diverse risposte a questa domanda. Ad esempio, Huh e colleghi (Huh, 2015) stabiliscono una connessione tra il GBS e il calcolo di spettri molecolari vibrazionali ed elettronici, legati a processi quali assorbimento ed emissione, e spettroscopia Raman o fotoelettronica. Questi processi sono fondamentali per lo studio di alcune proprietà delle molecole, come la struttura stessa della molecola, o le loro prestazioni all’interno di una cella solare.

Il GBS può risolvere problemi “pratici” anche in modo indiretto, tramite lo stretto collegamento che intrattiene con la teoria dei grafi, o teoria delle reti.

In questa branca della matematica un sistema di interesse viene modellizzato tramite vertici, o nodi, e lati, o collegamenti. Gli oggetti, o più in generale gli enti, che compongono il sistema sono modellizzati come dei punti, chiamati nodi o vertici del grafo, mentre le interazioni tra gli oggetti vengono modellizzate tramite dei collegamenti tra vertici, chiamati lati del grafo. Per fare un esempio, supponiamo di voler modellizzare i rapporti di amicizia in un gruppo di sette persone tramite un grafo. I vertici saranno sette, cia-

scuno rappresentante una persona diversa, e tra due vertici sarà presente un collegamento se tra le due persone rappresentate dai vertici c'è un legame di amicizia.

In generale, dato un grafo, esistono una serie di problemi da risolvere, alcuni dei quali riguardano la ricerca di alcuni sottografi particolari. Come suggerisce il nome, un sottografo è un sottoinsieme di un grafo, in cui sono presenti solo alcuni dei vertici e collegamenti tra essi. Tra i tanti sottografi interessanti vi sono le cricche, sottografi in cui ogni vertice è collegato ad ogni altro vertice del sottografo. Un esempio di grafo con la rispettiva cricca è riportato in Figura 5. Esistono diversi problemi legati alle cricche: determinare il numero di sottografi, con un dato numero di vertici, che sono anche cricche; determinare qual è la massima dimensione per una cricca in un dato grafo, etc. etc. L'elenco potrebbe proseguire a lungo, con innumerevoli varianti sul tipo di grafo di partenza e sui sottografi selezionati.

Il motivo di questa digressione sui grafi e sulle cricche è il seguente. Alcuni approcci per lo sviluppo di farmaci, come il *molecular docking* o la previsione della struttura delle proteine, possono essere riformulati in un problema che richiede di trovare la cricca di massimo peso di un dato grafo. Yu e colleghi (Yu, 2023) hanno dimostrato come risolvere questi problemi usando il GBS. In sintesi, si modella il problema di interesse (in questo caso l'interazione tra una proteina e un ligando) con un opportuno grafo. Si trasferisce l'informazione contenuta nel grafo ai parametri di *squeezing* e nella matrice unitaria del circuito. Si realizza un esperimento di GBS con i parametri appena determinati. Dai campioni rivelati in output si estraggono le cricche, e si determina quella con massimo peso come il campione con probabilità più alta. I risultati così ottenuti vengono poi confrontati con quelli determinati sperimentalmente con metodi tradizionali, mostrando un buon accordo. Si tratta di un risultato notevole, non solo in quanto dimostrazione sperimentale del GBS, ma anche perché risolvono un problema difficile, nel senso utilizzato all'inizio di queste note: infatti, la maggior parte dei problemi di ricerca di cricche in un grafo ha una complessità esponenziale nel numero di nodi del grafo.

GBS e vantaggio quantistico

Ora che abbiamo visto alcune motivazioni “pratiche” per avere un *gaussian boson sampler* che funzioni correttamente, passiamo alle dimostrazioni di vantaggio quantistico tramite GBS, fulcro di queste note.

La prima dimostrazione rilevante di vantaggio quantistico tramite GBS risale al 2020 quando un gruppo di ricercatori cinesi, guidato da Jian-Wei

Pan (Zhong, 2020), annuncia di aver ottenuto vantaggio quantistico con il dispositivo da loro ideato e chiamato Jiuzhang. Jiuzhang un computer quantistico con cui si possono realizzare esperimenti di GBS iniettando 50 stati *squeezed* in un interferometro a 100 modi, e campionando eventi dalla distribuzione di output contenenti fino ad un massimo di 76 fotoni con un tasso di campionamento che è 14 ordini di grandezza (!) più grande dei migliori algoritmi classici eseguiti sul più potente supercomputer. Il risultato fu sicuramente eclatante, e come anche gli autori stessi suggeriscono in conclusione al loro articolo, servì a motivare non solo altri gruppi di ricerca sperimentale nel superare questo risultato, ma anche lo studio teorico del GBS e di simulazioni classiche per mettere alla prova queste dimostrazioni di vantaggio quantistico. Teniamo a mente questo invito, perché non rimarrà inascoltato.

Il setup sperimentale e le analisi statistiche utilizzate per dichiarare il vantaggio quantistico di questo esperimento vennero poi ampliate e perfezionate, e i risultati furono pubblicati nel 2021 in un secondo lavoro (Zhong, 2021). Il numero di stati *squeezed* iniettati rimane invariato ed uguale a 50, mentre i modi dell'interferometro salgono a 144, come il massimo numero di fotoni rivelati negli eventi di output, che sale a 113. Questo nuovo computer quantistico si chiama Jiuzhang 2.0, e il suo tasso di campionamento è di 24 ordini di grandezza maggiore dei migliori approcci classici. Ancora una volta Jian-Wei Pan e colleghi stupirono la comunità scientifica con risultati sicuramente di grande valore.

La sequenza di dimostrazioni di vantaggio quantistico da parte del gruppo di Jian-Wei Pan viene interrotta da Xanadu Quantum Technologies, azienda canadese con sede a Toronto che si occupa di computazione quantistica basata sui fotoni, che nel 2022 annuncia una dimostrazione di vantaggio quantistico grazie al proprio computer quantistico, chiamato Borealis (Madsen, 2022). La particolare configurazione usata per questo esperimento permette di iniettare 216 stati *squeezed* in altrettanti modi, andando così a riempire tutti i modi di input del sistema. Il numero massimo di fotoni rivelato nei campioni di output è 219, con una media di 125. Inoltre, Madsen e colleghi (Madsen, 2022) confrontano il tempo stimato che Fugaku (un supercomputer localizzato in Giappone, presso il centro di ricerca Riken) impiegherebbe per riprodurre i loro risultati e quelli dei precedenti esperimenti. Non anticipo nulla di questi risultati, li vedremo a breve.

Infine, la più recente dimostrazione di vantaggio quantistico tramite GBS, a mia conoscenza e alla data di stesura di queste note, è ancora una volta del gruppo di Jian-Wei Pan con una versione ulteriormente aggiornata del loro computer quantistico, ora chiamato Jiuzhang 3.0 (Deng, 2023). Il numero di

fotoni rivelati in questo esperimento arriva ad un massimo di 255, e vengono fatte analisi simili a quelle condotte per Borealis, con la differenza che i tempi di simulazione classica vengono stimati per Frontier, l'attuale supercomputer più veloce al mondo, localizzato negli Stati Uniti.

Una doverosa precisazione prima di proseguire. Nelle righe precedenti ho sintetizzato i risultati delle dimostrazioni di vantaggio quantistico tramite GBS sulla piattaforma fotonica, limitando al minimo i dettagli tecnici delle specifiche implementazioni sperimentali e le innovazioni introdotte da ogni modello rispetto ai precedenti. Questi elementi sono degni di nota ed interessanti da studiare, ma esulano dal fulcro di queste note, che è il vantaggio quantistico. Per questo scopo ritengo più utile discutere (i) come i ricercatori abbiano verificato il corretto funzionamento del dispositivo in un regime non trattabile classicamente, e (ii) quali analisi e risultati hanno permesso loro di dichiarare di aver raggiunto il vantaggio quantistico. Nel prossimo capitolo mi focalizzerò sui risultati di Borealis: nuovamente, non per mancanza di interesse verso gli altri lavori citati, ma semplicemente perché, per varie ragioni, è il lavoro che ho studiato maggiormente tra quelli citati. Quindi, invito gli interessati ad approfondire i dettagli tecnici dei singoli esperimenti accedendo direttamente agli articoli riportati in bibliografia, e tutti i lettori a seguirmi nella scoperta di Borealis e dei suoi risultati.

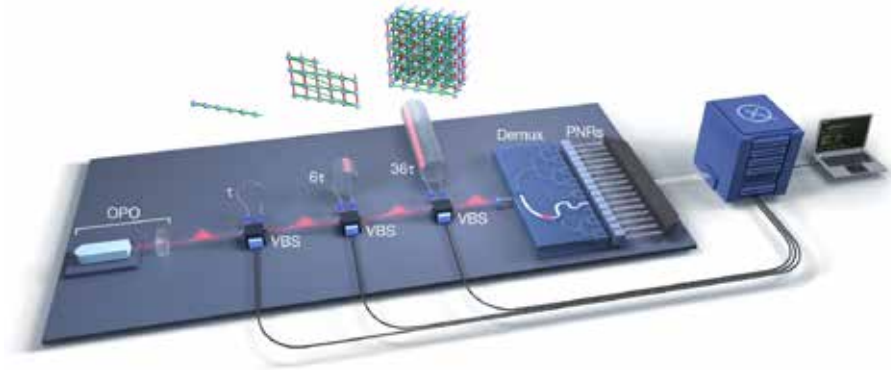
Il vantaggio quantistico di Borealis

Cos'è Borealis, e cosa fa? Se volessimo, potremmo rispondere a questa domanda così:

“Borealis è un Gaussian boson sampler che dimostra vantaggio quantistico.”

Poter affermare ciò, tuttavia, non è stato affatto banale.

Cominciamo descrivendone la struttura e il principio di funzionamento di Borealis, di cui uno schema è riportato in Figura 6. Una sequenza di stati *squeezed*, separati da un intervallo di tempo che chiamiamo τ , viene generata e poi iniettata nel sistema. Ciascuno passa poi attraverso tre *beam splitter* variabili e delle fibre ottiche a loop, che vanno a comporre il circuito ottico attraverso cui si propagano i fotoni, e permettono ai fotoni di interferire. In particolare, i fotoni interferiscono se sono separati da un intervallo di tempo τ (*i.e.*, se sono consecutivi), 6τ , oppure 36τ . Lo stato così ottenuto passa poi attraverso un

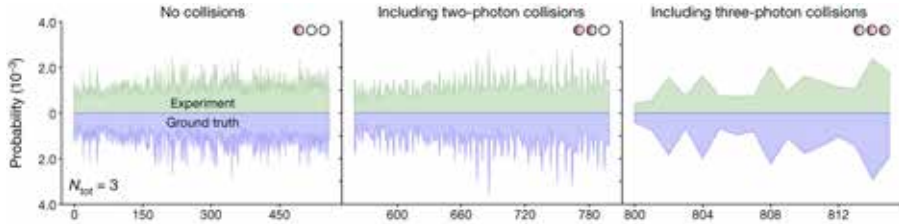


6. Schema del dispositivo Borealis. OPO: *optical parametric oscillator*, usato per generare stati *squeezed*; VBS: *variable beamsplitter*; Demux: *demultiplexer*; PNRs: *photon-number-resolving detectors*. (Credits: (Madsen, 2022))

demultiplexer, che lo divide in 16 canali. All'uscita di ciascun canale è presente un rivelatore che conta quanti fotoni arrivano. Un aspetto particolarmente rilevante di Borealis è la sua programmabilità. Tramite un'apposita libreria scritta in linguaggio Python sviluppata e fornita direttamente dall'azienda Xanadu, è possibile controllare i parametri del circuito, ossia i parametri di *squeezing* degli stati di input e i *beamsplitter* variabili, per modificare la struttura del circuito, e di conseguenza la matrice unitaria che lo descrive. Per un certo periodo di tempo, anche per utenti al di fuori di Xanadu è stato possibile accedere a Borealis da remoto e utilizzarlo per fare esperimenti di GBS.

Come hanno fatto Madsen e colleghi a dimostrare che Borealis è un *Gaussian boson sampler*, e a dichiarare di aver ottenuto vantaggio quantistico?

Cominciamo dalla prima parte: "Borealis è un *Gaussian boson sampler*". Per poter dire ciò, si deve dimostrare che il dispositivo campioni correttamente dalla distribuzione di probabilità di output, ossia che per una specifica configurazione di output, la probabilità calcolata teoricamente e quella determinata sperimentalmente siano sufficientemente simili. Questa verifica si può fare solo in un regime tale per cui sia possibile calcolare la probabilità teorica: per quanto detto nella sezione precedente ricordiamo infatti che, se il numero di fotoni iniettati è molto alto, la probabilità teorica non si può calcolare, perché il calcolo dell'hafniano non è un problema risolvibile in modo efficiente con un computer classico. Pertanto, per questa prima verifica, ci focalizziamo in



7. Distribuzione di probabilità ottenuta nel caso di 3 fotoni. La distribuzione verde è ottenuta sperimentalmente, quella viola calcolata teoricamente. Da sinistra verso destra, sono riportati i campioni in cui un massimo di uno, due, e tre fotoni vengono rivelati da ciascun rivelatore. La fedeltà tra le due distribuzioni è del 99.9%. (Credits: (Madsen, 2022))

un regime in cui il numero di fotoni è basso¹⁰ (compreso tra 3 e 6) e sono coinvolti pochi modi (16 modi per questo regime). Da ora in avanti, chiamiamo *ground truth* (tradotto letteralmente, verità fondamentale) la coppia (r, T) , dove r è la lista contenente i parametri di *squeezing*, mentre T è la matrice che caratterizza il dispositivo. La *ground truth* viene specificata dall'utente, che di volta in volta decide i parametri dell'esperimento. All'interno di T sono contenuti non solo le impostazioni dei *beamsplitter* variabili decise dall'utente, ma anche le imperfezioni sperimentali che caratterizzano il dispositivo, inserite nel programma per la gestione di Borealis direttamente dagli sviluppatori.

Negli esperimenti di cui parleremo in seguito, il ruolo della *ground truth* è duplice. Da un lato, la *ground truth* viene usata per simulare un esperimento di Borealis: vale a dire, una volta scelta la coppia (r, T) , tramite l'apposita libreria Python si può calcolare la probabilità delle configurazioni di output con un computer classico, oppure ottenere un campione simulato (ossia, una distribuzione di probabilità del numero di fotoni sui modi di output), e da questa calcolare eventuali proprietà statistiche della distribuzione. Dall'altro lato, la *ground truth* viene poi usata per impostare l'esperimento sul dispositivo fisico: i valori di r vengono usati per generare gli stati *squeezed*, mentre i valori all'interno di T vengono trasferiti ai *beamsplitter* variabili e agli altri elementi programmabili del sistema.

Torniamo ora al regime di basso numero di fotoni e modi. La procedura per la verifica è la seguente: l'utente specifica una *ground truth*; si calcola la probabili-

¹⁰ Il numero di fotoni è ragionevolmente "controllabile" cambiando opportunamente i parametri sperimentali per la generazione degli stati *squeezed*.

tà teorica di ciascuna possibile configurazione di output; si utilizzano i valori della *ground truth* per programmare Borealis e si raccoglie un numero di campioni sufficiente (qui circa 84 milioni) per stimare le probabilità appena menzionate. Si ottengono così due distribuzioni di probabilità sui modi di output, che vengono confrontate per quantificarne la somiglianza. Nel produrre queste distribuzioni, gli autori scorrono i casi in cui è arrivato al massimo un fotone per rivelatore (*i.e.*, 0 o 1 fotoni per rivelatore) dai casi in cui ne sono arrivati più di uno.

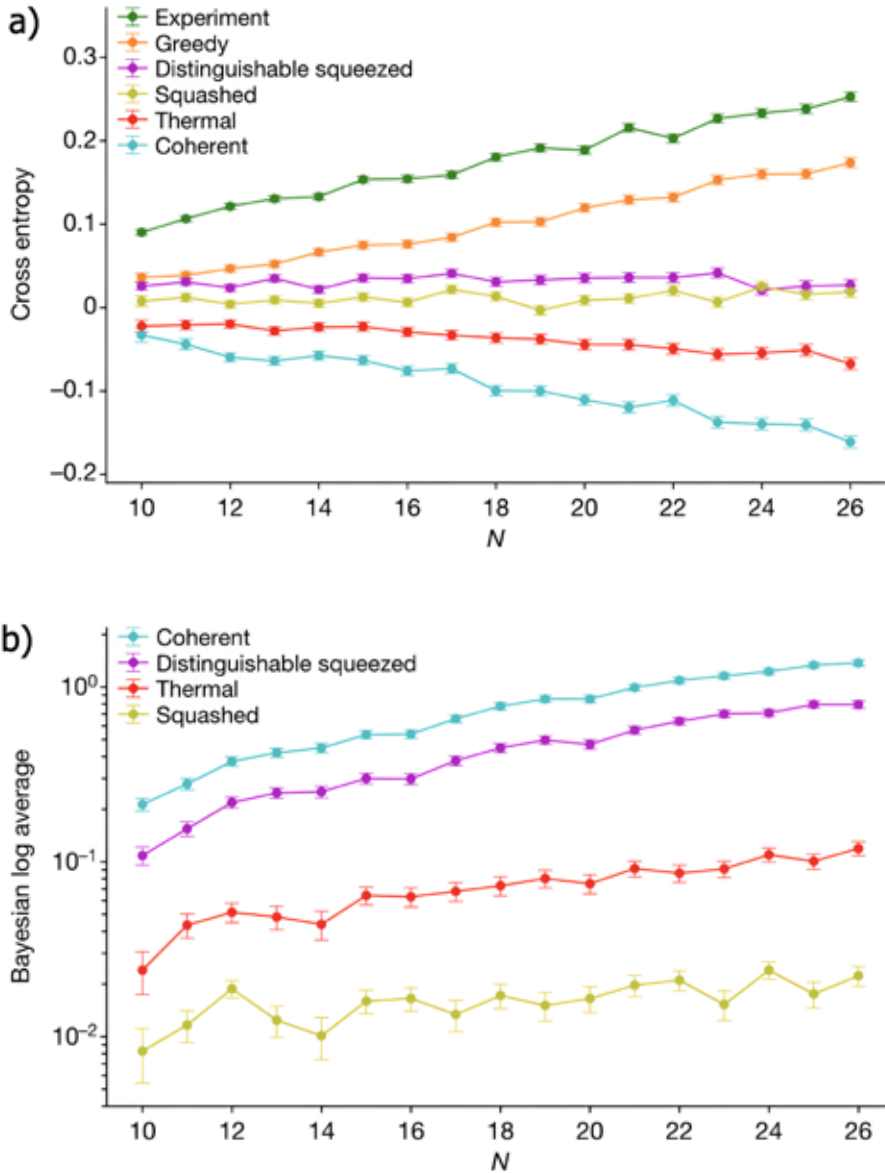
I risultati nel caso di 3 fotoni sono mostrati in Figura 7. Si potrebbe dire a colpo d'occhio che le due distribuzioni sono molto simili ma, come già discusso per i BS, è necessario quantificare questa somiglianza. Anche qui gli autori usano la fedeltà come metrica di riferimento, il cui valore in questo caso è del 99.9%. Nell'articolo completo vengono mostrati anche i risultati per numero di fotoni uguale a 4, 5, e 6.

Questi risultati permettono di concludere che, nel regime di basso numero di modi e di fotoni, Borealis sta funzionando correttamente come un gaussian boson sampler.

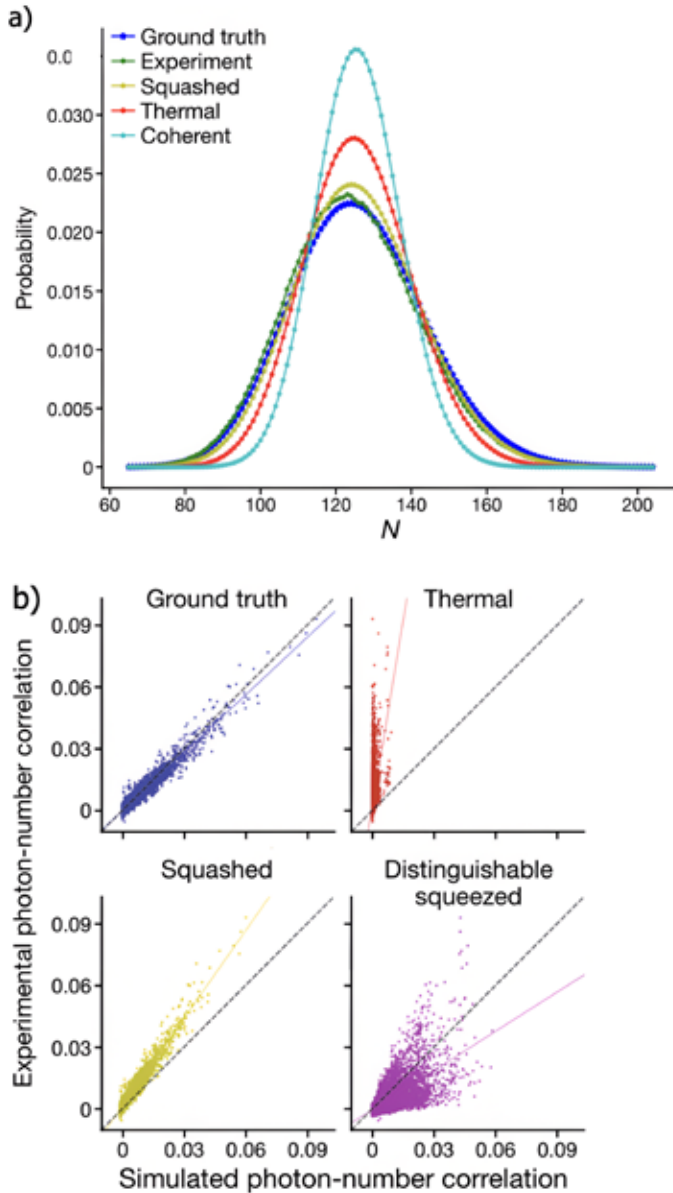
Passando ad un regime intermedio per numero di modi e di fotoni (21 fotoni rivelati in media, 216 modi coinvolti), gli autori si confrontano con i cosiddetti “*spoofers*” del GBS. Gli *spoofers* sono avversari classici del GBS che cercano di riprodurre la distribuzione di una data *ground truth*, ossia cercano di produrre dei campioni (*i.e.*, delle distribuzioni di fotoni nei modi di output) simili a quelli ottenuti dalla *ground truth*. La “classicità” degli *spoofers* si traduce nell'uso di stati diversi dagli stati *squeezed* usati per produrre la *ground truth*. Gli *spoofers* qui considerati sono lo *spoofers* coerente (inietta luce coerente, analoga a quella emessa da un laser), termico (inietta luce termica, analoga a quella emessa da una lampadina), *squeezed* distinguibile (inietta stati *squeezed* distinguibili), ed infine *squashed* (inietta stati gaussiani classici). Le distribuzioni di probabilità degli *spoofers* si ottengono tramite simulazioni: vale a dire, per un dato *spoofers* si possono eseguire simulazioni che producono campioni di output come se iniettiamo nel circuito lo stato previsto da quello specifico *spoofers*. Questo si può fare in modo efficiente, trattandosi di stati classici.

L'obiettivo di questo regime di fotoni e numero di modi è dimostrare che i dati sperimentali sono più compatibili con la *ground truth* rispetto a qualsiasi altro *spoofers* considerato. Alternativamente, la distribuzione dalla quale provengono con maggior probabilità è quella della *ground truth*. Per fare ciò, gli autori si avvalgono di due test statistici.

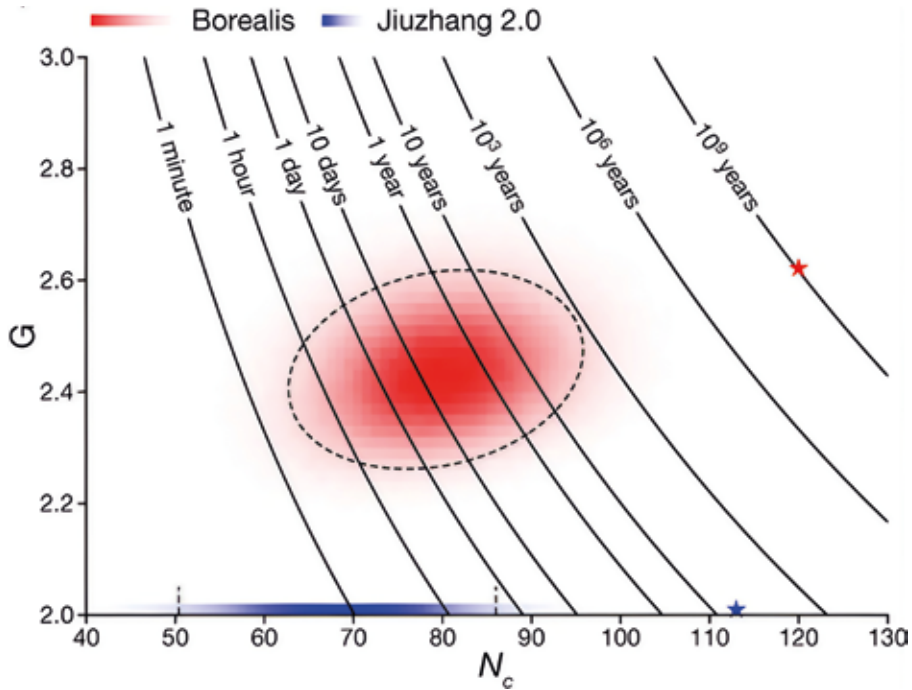
Il primo test è il *cross-entropy benchmark*, ed è basato sul calcolo della *cross-entropy* rispetto alla *ground truth* per un dato insieme di campioni. Intuitivamente, maggiore la *cross-entropy*, maggiore è la compatibilità tra i campio-



8. Risultati per il regime intermedio di numero di modi e di fotoni. a) *Cross-entropy benchmark* rispetto alla *ground truth*. I valori riportati dai campioni sperimentali sono più alti di quelli di qualsiasi altro *spoofers*. b) *Bayesian log average* per quattro *spoofers*. I valori del *Bayesian log average* sono strettamente positivi per tutti gli *spoofers*. (Credits: (Madsen, 2022))



9. Analisi della proprietà statistiche della distribuzione del numero di fotoni per la *ground truth*, i campioni sperimentali, e gli *spoofers*. a) Distribuzione di probabilità del numero di fotoni rivelati nel regime di alto numero di fotoni e di modi coinvolti. b) Cumulanti del secondo ordine per la *ground truth* e i diversi *spoofers*. (Credits: (Madsen, 2022))



10. Tempo stimato necessario a Fugaku per riprodurre i campioni sperimentali di Jiuzhang 2.0 e Borealis. I campioni per cui servirebbe il tempo più lungo sono indicati con una stella. (Credits: (Madsen, 2022))

ni usati per calcolarla e la *ground truth*. Senza entrare nei dettagli matematici, il test procede così: si seleziona un insieme di campioni con un numero totale di fotoni N , e per tale insieme si calcola la *cross-entropy* rispetto alla *ground truth*. Questa procedura viene ripetuta per diversi valori di N , sia per i campioni ottenuti sperimentalmente, sia per quelli ottenuti dagli *spoofers*. Infine si confrontano i valori di *cross-entropy* ottenuti. I risultati di questo test sono riportati in Figura 8a), in cui si vede che i campioni sperimentali provenienti da Borealis hanno una *cross-entropy* rispetto alla *ground truth* più alta di qualsiasi altro *spoofers*. Equivalentemente, nessuno degli avversari classici è uno *spoofers* di successo rispetto al *cross-entropy benchmark*.

Il secondo test è basato sulla statistica bayesiana. Per ciascun campione all'interno di uno degli insiemi selezionati in precedenza, si calcola il rapporto tra la probabilità che il campione possa provenire dalla *ground truth* e la probabilità che il campione possa provenire da uno degli *spoofers*. Si calcola poi la

media dei logaritmi di questi rapporti, chiamata *Bayesian log average*. Questi passaggi vengono ripetuti al variare del numero totale di fotoni dall'insieme, e al variare dello *spoof*. Se il *Bayesian log average* è positivo, allora possiamo concludere che è più probabile che i campioni generati da Borealis provengano dalla *ground truth* rispetto agli *spoof*. In Figura 8b) possiamo vedere come il *Bayesian log average* è strettamente positivo per tutti gli *spoof*. Pertanto la probabilità che i campioni sperimentali di Borealis provengano dalla *ground truth* è maggiore di quella che provengano da qualsiasi *spoof* considerato.

Spostiamoci ora nell'ultimo regime considerato, dove il numero di fotoni e di modi è alto (125 fotoni rivelati in media, 216 modi coinvolti), in cui verrà dimostrato il vantaggio quantistico. In questo regime il calcolo della probabilità di un singolo campione usando un computer classico non è fattibile. Pertanto, gli autori decidono di studiare alcune proprietà statistiche della distribuzione del numero di fotoni della *ground truth*, e confrontarle con le proprietà statistiche delle distribuzioni dei campioni sperimentali e degli *spoof*. Anche in questo regime vengono raccolti circa 10^6 campioni, con numero totale di fotoni N all'interno di un singolo campione che varia tra 60 e 219, con una media di 125. Nella prima analisi i campioni con lo stesso N vengono uniti in un sottoinsieme, e si calcola la probabilità corrispondente come rapporto tra il numero di campioni nel sottoinsieme e il numero di campioni totale. Ad esempio, se arrotondiamo il numero di campioni totale a 10^6 , e di questi $3.5 \cdot 10^4$ hanno $N=125$, la corrispondente probabilità è $(3.5 \cdot 10^4)/(10^6) = 0.035$. Questo calcolo viene ripetuto al variare di N usando i campioni sperimentali, per poi passare ai campioni simulati a partire dalla *ground truth* e dagli *spoof*. In Figura 9a) mostriamo le distribuzioni di probabilità così calcolate per la *ground truth*, i campioni sperimentali, e gli *spoof*. La distribuzione che più si avvicina a quella della *ground truth* è quella sperimentale, ulteriore conferma del corretto funzionamento di Borealis come *gaussian boson sampler*.

Si passa poi a studiare un'altra statistica di questa distribuzione, che riguarda la correlazione tra il numero di fotoni rivelati in due modi diversi, considerando tutte le possibili coppie di modi, ed è chiamata cumulante del secondo ordine. Questa quantità viene prima calcolata per i campioni sperimentali, e poi per le simulazioni della *ground truth* e degli *spoof*. Per confrontarle, si produce un grafico in cui sull'asse orizzontale viene indicata la cumulante calcolata tramite una delle simulazioni, mentre sull'asse verticale viene riportata la cumulante calcolata a partire dai campioni sperimentali. Se questi due valori coincidono, o sono sufficientemente vicini, allora i punti andranno a formare una linea retta che forma un angolo di 45° con l'asse orizzontale. In caso contrario, il grafico risultante avrà una forma diversa.

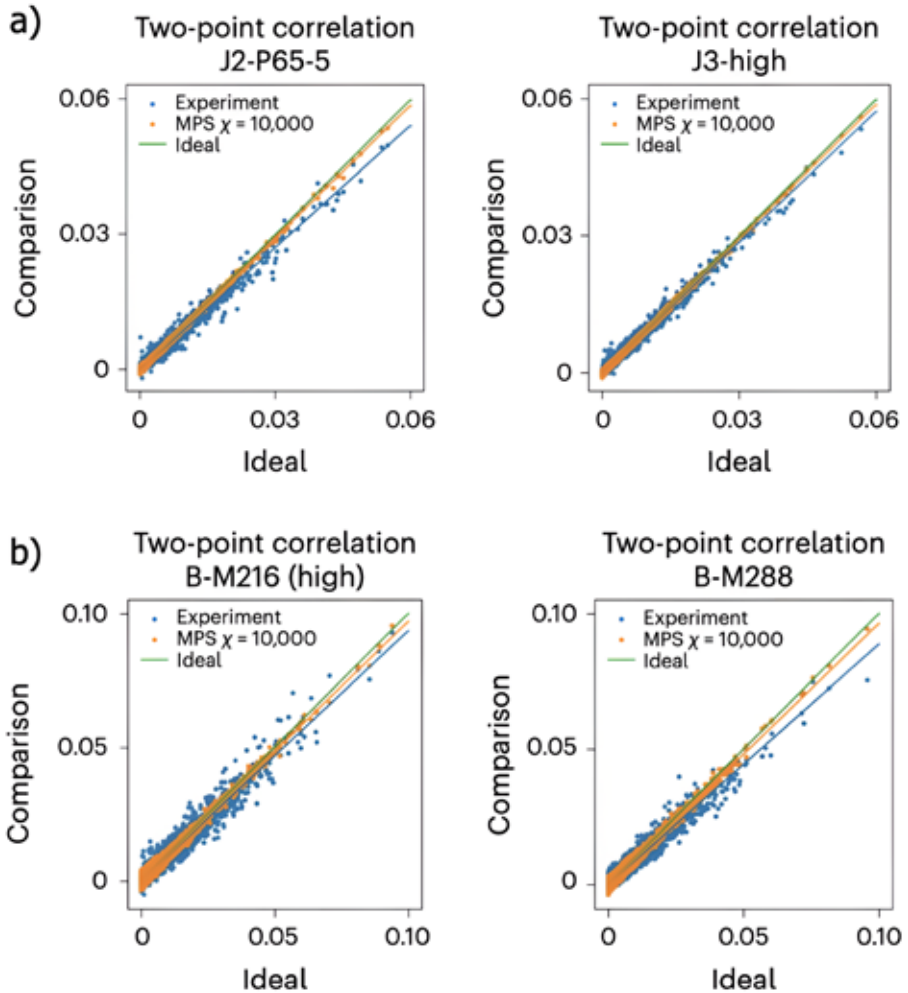
I grafici per questo confronto sono riportati in Figura 9b). Come si vede, l'unica distribuzione compatibile con quella sperimentale è la *ground truth*, ulteriore conferma di quanto scoperto finora.

Arriviamo infine alla vera e propria quantificazione del vantaggio quantistico di Borealis. A questo scopo, Madsen e colleghi stimano il tempo che Fugaku impiegherebbe per riprodurre un particolare campione sperimentale proveniente da Borealis o da Jiuzhang 2.0 (l'esperimento di GBS più grande precedente a Borealis) in funzione di due parametri: N_c , numero di rivelatori che hanno rivelato almeno un fotone, e G , chiamato parametro di collisione. In particolare, $G = 2$ se i rivelatori utilizzati sono "a soglia", cioè se non possono contare esattamente quanti fotoni sono arrivati, ma solo se non ne sono arrivati o se ne è arrivato almeno uno, come nel caso di Jiuzhang 2.0; nel caso di Borealis invece $G > 2$. Per ogni campione sperimentale di Borealis e di Jiuzhang 2.0, si calcolano N_c e G , si stima il tempo necessario che Fugaku impiegherebbe tramite la formula di prima, per poi riassumere il tutto in un grafico, mostrato in Figura 10. I campioni sperimentali di Jiuzhang 2.0 verrebbero riprodotto da Fugaku in tempi compresi tra meno di un minuto e qualche ora. Nel caso peggiore, indicato con una stella blu sul grafico, sarebbero necessari più di 10 anni. I campioni di Borealis invece verrebbero riprodotti in tempi compresi tra qualche ora e decine, o addirittura centinaia, di anni. Il caso peggiore verrebbe riprodotto in circa un miliardo di anni. In media, Fugaku riprodurrebbe un singolo campione di Jiuzhang 2.0 in circa 1.5 ore, o circa 8500 anni per riprodurre tutti i 50 milioni di campioni sperimentali; servirebbero invece 9000 anni per generare un singolo campione di Borealis, e circa 9 miliardi di anni per riprodurre il milione di campioni sperimentali. Se volessimo condensare il vantaggio quantistico di Borealis in una frase, potremmo dire che Fugaku impiegherebbe 9000 anni per riprodurre un campione, mentre a Borealis bastano 36 μ s, 14 ordini di grandezza in meno.

Alla fine di questa serie di analisi statistiche e computazionali, possiamo concludere che Borealis ha dato una solida dimostrazione di vantaggio quantistico. È tutto qui? O la corsa tra gli algoritmi classici e i dispositivi quantistici è andata avanti? Lo scopriremo nel prossimo capitolo.

Un colpo di coda degli algoritmi classici

L'argomento principale di questo capitolo è giunto alla mia attenzione sostanzialmente per caso, curiosando tra gli articoli pubblicati di recente. Dopo aver letto il lavoro, ho fatto un'analisi all'indietro negli anni, scoprendo che



11. Confronto tra i risultati sperimentali di GBS e la simulazione classica tramite MPS di Oh e colleghi. a) Confronto tra i risultati sperimentali di Jiuzhang 2.0 e 3.0 e quelli ottenuti tramite simulazione classica basata sugli MPS. b) Confronto tra i risultati sperimentali di Borealis e quelli ottenuti tramite simulazione classica basata sugli MPS. (Credits: (Oh, 2024))

oltre al GBS anche il BS e altri problemi promettenti per una dimostrazione di vantaggio quantistico, tra cui quelli citati nell'introduzione, hanno stimolato la ricerca in questa direzione.

Oh e colleghi (Oh, 2024) hanno sviluppato un algoritmo classico che ripro-

duce i risultati sperimentali di tutti e tre le versioni di Jiuzhang e di Borealis con una precisione maggiore e con una quantità di risorse (*i.e.*, memoria occupata e tempo impiegato) considerevoli ma comunque ragionevoli rispetto alle migliaia o milioni di anni stimati originariamente. Vediamo brevemente come.

Poiché i dispositivi sperimentali sono soggetti a perdite di fotoni durante la propagazione all'interno del circuito, lo stato di output immediatamente prima dei fotorivelatori può essere riscritto come somma di due contributi. Il primo contributo è quello quantistico, costituito dallo stesso circuito considerato di partenza, ma in cui questa volta vengono iniettati stati *squeezed* con parametri di *squeezing* più piccoli rispetto a prima. I fotoni contenuti all'interno di questo contributo sono la risorsa quantistica che viene effettivamente impiegata nel GBS. Essendo i parametri di *squeezing* più piccoli, questo contributo conterrà tipicamente meno fotoni di quelli iniettati in partenza. Il secondo contributo è classico, e si ottiene applicando una operazione chiamata di "spostamento" su ciascuno dei canali di output. Senza entrare nei dettagli tecnici, ci basti sapere che questa operazione si può implementare in modo efficiente dal punto di vista delle simulazioni numeriche.

La prima domanda che si pongono Oh e colleghi è la seguente: quanti sono i fotoni che compongono la risorsa quantistica, rispetto a quelli iniettati in partenza? A partire dai dati forniti dagli autori degli esperimenti precedenti, applicando la decomposizione di cui sopra, si trova che per tutti i casi precedenti (sia le tre versioni di Jiuzhang, sia Borealis), solamente una percentuale minore del 10% dei fotoni iniettati funge da effettiva risorsa quantistica. Ad esempio, nel caso di Borealis il numero medio di fotoni rivelati è 125.85, ma solamente 6.54 fotoni, il 5.2% circa, fungono effettivamente da risorsa quantistica. Risultati simili si trovano per gli altri esperimenti.

Oh e colleghi si pongono quindi un'ulteriore domanda: possiamo sfruttare questa riduzione dei parametri di *squeezing*, o equivalentemente del numero di fotoni effettivi, per creare un algoritmo classico che riproduca i risultati sperimentali con una quantità ragionevole di risorse? La domanda sembra ben posta: se la risorsa che rende quantistico un esperimento non è presente in quantità sufficiente, significa che l'esperimento potrebbe non essere "sufficientemente quantistico", e quindi classicamente simulabile in qualche modo.

Questo si può fare attraverso dei particolari stati, chiamati *Matrix Product State* (MPS). I MPS sono particolarmente utili ed efficienti quando si lavora con sistemi i cui componenti interagiscono localmente, ossia se interagiscono solo quando sono vicini, e sono sopresse interazioni a lungo raggio. Tuttavia, questa è una approssimazione: in un sistema reale ci saranno comunque

della interazioni a lungo raggio, che usando un MPS scegliamo di trascurare. Questa operazione può essere vista come una sorta di compressione di un'immagine. La quantità di dettagli che potremo apprezzare dipenderà sia da quanto è dettagliata l'informazione contenuta nel sistema, sia da quanto comprimiamo. È vero che maggiore è la compressione, maggiori saranno i dettagli che perderemo; ma se la nostra immagine contiene pochi dettagli rilevanti, potremmo permetterci di comprimere un po' di più e guadagnare memoria senza perdere molta informazione. Negli MPS, la quantità che svolge un ruolo equivalente alla risoluzione nel processo di compressione ora descritto è chiamata *bond dimension*, solitamente indicata con la lettera greca χ . Riassumendo, Oh e colleghi riescono a simulare classicamente il contributo quantistico usando un MPS con $\chi=10^4$, mentre la parte classica è già simulabile in maniera efficiente.

Una volta trovato un modo efficiente per simulare queste realizzazioni sperimentali di GBS, Oh e colleghi provano a ripetere le analisi statistiche fatte nei lavori precedenti. Un esempio di questa analisi è lo studio della funzione di correlazione al secondo ordine (analoga alla cumulante del secondo ordine del capitolo precedente). In Figura 11a) e 11b) vengono mostrati i confronti tra i risultati ottenuti tramite la simulazione classica con i MPS e i risultati sperimentali di Jiuzhang 2.0, 3.0, e Borealis nel regime di alti modi e alto numero di fotoni. I valori ottenuti tramite il MPS sono sistematicamente più vicini al caso ideale rispetto ai dati sperimentali, e questo viene confermato da diverse misure statistiche. Ad esempio, nel caso di Borealis, la correlazione tra il caso ideale e i risultati sperimentali è di 0.964, mentre quella tra il caso ideale e il MPS è di 0.980, e similmente per le versioni di Jiuzhang.

Non si tratta di risultati straordinariamente migliori di quelli sperimentali, che erano comunque già degli ottimi risultati. A mio modo di vedere, il punto importante di questo lavoro è l'aver messo in luce che, a causa delle perdite di fotoni durante la propagazione all'interno del circuito, le risorse quantistiche effettivamente impiegate si riducono e una simulazione classica che ottiene risultati comparabili, se non addirittura migliori di quelli sperimentali, è possibile. Se queste perdite venissero ridotte, ciò renderebbe i risultati sperimentali molto più difficili da simulare con un MPS, fornendo quindi una nuova via per una ulteriore dimostrazione di vantaggio quantistico. Tutto ciò potrebbe motivare i ricercatori a cercare nuovi metodi e strategie per rendere i loro computer quantistici ancora più performanti e superare l'algoritmo classico qui proposto.

Conclusioni

Al termine di queste note, proviamo a trarre qualche conclusione.

Il vantaggio quantistico non è stato, non è, e probabilmente non sarà il risultato di un singolo esperimento, ma piuttosto il risultato di una corsa tra i computer quantistici e gli algoritmi di simulazione classici, in cui i risultati di uno stimolano la ricerca dell'altro a migliorare sempre di più. Finora sono stati fatti esperimenti in cui si dimostra vantaggio quantistico, ad esempio impiegando un tempo molto minore di quello che avrebbe impiegato il migliore metodo classico esistente in quel momento. Tuttavia, sfruttando le imperfezioni degli esperimenti quantistici, è stato possibile sviluppare nuovi metodi classici che possono simulare i risultati sperimentali in un tempo ragionevole. Pertanto, se si vuole nuovamente dimostrare vantaggio quantistico, si dovrà migliorare in qualche modo la procedura sperimentale per ottenere risultati migliori. Quando, e se, in futuro un nuovo esperimento proporrà una dimostrazione di vantaggio quantistico ancora più robusta, allora gli algoritmi classici cercheranno nuovamente di migliorarsi e superarlo, in una gara piena di sorpassi tra gli algoritmi classici e i computer quantistici.

Inoltre, è importante sottolineare che nessuna delle simulazioni classiche menzionate toglie valore alle dimostrazioni sperimentali che, come già detto nel testo, sono meritevoli di essere studiate in ogni caso, indipendentemente dall'aver ottenuto o meno vantaggio quantistico. Non dimostrano neanche che uno specifico problema (che sia il GBS, il *random circuit sampling*, o il *quantum annealing*) non sia adatto per dimostrare il vantaggio quantistico. Queste simulazioni classiche spingono un po' più in là il limite classico da superare per dimostrare vantaggio quantistico, mettendo alla prova la ricerca dal lato sperimentale.

Cosa ci riserva il futuro per il vantaggio quantistico non è certamente dato saperlo a me, ma sono sicuro che le sorprese non mancheranno.

Bibliografia

- Aaronson S., Arkhipov A., 2011, *The computational complexity of linear optics*, “Proceedings of the forty-third annual ACM symposium on Theory of computing”, p. 333-342, <https://doi.org/10.1145/1993636.1993682>.
- Arute F. *et al.*, 2019, *Quantum supremacy using a programmable superconducting processor*, “Nature”, volume 574, number 7779, pp. 505 - 510, <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1666-5>
- Bentivegna M. *et al.*, 2015, *Experimental scattershot boson sampling*, “Science Advances”, volume 1, number 3, p. e1400255, <https://www.science.org/doi/full/10.1126/sciadv.1400255>
- Brod D. J. *et al.*, 2019, *Photonic implementation of boson sampling: a review*, “Advanced Photonics”, volume 1, number 3, <https://doi.org/10.1117/1.AP.1.3.034001>
- Broome M. A. *et al.*, 2013, *Photonic boson sampling in a tunable circuit*, “Science”, col. 339, number 6121, p. 794 - 798, https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.1231440?casa_token=Qq7qqv3R93EAAAAA%3ArYqQ1SISsYRzAJVIw-Gu10LCzoaaUEq0qWtoqu_N3u_ikVfPILqglrGK5OP80BpGem-C_4sAM-s1F6mQ
- Carosini L. *et al.*, 2024, *Programmable multiphoton quantum interference in a single spatial mode*, “Science Advances”, volume 10, number 16, p. eadj0993, <https://www.science.org/doi/full/10.1126/sciadv.adj0993>
- Crespi A. *et al.*, 2013, *Integrated multimode interferometers with arbitrary design for photonic boson sampling*, “Nature Photonics”, volume 7, number 7, p. 545 - 549, <https://www.nature.com/articles/nphoton.2013.112>
- Deng Y.-H. *et al.*, 2023, *Gaussian boson sampling with pseudo-photon-number-resolving detectors and quantum computational advantage*, volume 131, number 15, p. 150601, <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.131.150601>
- Feynman R., 1982, *Simulating physics with computers*, “International Journal of Theoretical Physics”, volume 21, number 6, pp. 467 - 488, <https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.1201/9780429500459-11/simulating-physics-computers-richard-feynman>
- Gao J. *et al.*, 2019, *Experimental collision-free dominant boson sampling*, arXiv preprint, [arXiv:1910.11320v1](https://arxiv.org/abs/1910.11320v1)
- Grover L. K., 1996, *A fast quantum mechanical algorithm for database search*, “Proceedings of the twenty-eighth annual ACM symposium on Theory of computing”, pp. 212-219, <https://dl.acm.org/doi/pdf/10.1145/237814.237866>
- Hamilton C. S. *et al.*, 2017, *Gaussian boson sampling*, “Physical Review Letters”, volume 119, number 17, p. 170501, <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.119.170501>
- Huh J. *et al.*, 2015, *Boson sampling for molecular vibronic spectra*, “Nature Photonics” volume 9, number 9, p. 615–620. <https://www.nature.com/articles/nphoton.2015.153>
- Kim Y. *et al.*, 2023, *Evidence for the utility of quantum computing before fault tolerance*, “Nature”, volume 618, number 7965, pp. 500 - 505, <https://doi.org/10.1038/s41586-023-06096-3>

- King A. D., 2023, *Quantum critical dynamics in a 5000-qubit programmable spin glass*, "Nature", volume 617, number 7959, pp. 61 - 66, <https://doi.org/10.1038/s41586-023-05867-2>
- Kruse R. *et al.*, 2019, *Detailed study of Gaussian boson sampling*, "Physical Review A", volume 100, number 3, p. 032326, <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRevA.100.032326>
- Madsen L. S. *et al.*, 2022, *Quantum computational advantage with a programmable photonic processor*, "Nature", volume 606, number 7912, p. 75 - 81, <https://www.nature.com/articles/s41586-022-04725-x>
- Manin Y., 1980, *Computable and uncomputable*, "Sovetskoye Radio, Moscow" volume 128, p. 28. Traduzione disponibile in Manin Y., 1999, *Classical computing, quantum computing, and Shor's factoring algorithm*, arXiv preprint, <https://doi.org/10.48550/arXiv.quant-ph/9903008>
- Morita S., Hidetoshi N., 2008, *Mathematical foundation of quantum annealing*, "Journal of Mathematical Physics", volume 49, number 12, <https://doi.org/10.1063/1.2995837>
- Neville A. *et al.*, 2017, *Classical boson sampling algorithms with superior performance to near-term experiments*, "Nature Physics", volume 13, number 12, p. 1153 - 1157, <https://www.nature.com/articles/nphys4270>
- Oh, C. *et al.*, 2024, *Classical algorithm for simulating experimental Gaussian boson sampling*, "Nature Physics", pp. 1 - 8, <https://doi.org/10.1038/s41567-024-02535-8>
- Pan F., Zhang P., 2022, *Simulation of quantum circuits using the big-batch tensor network method*, "Physical Review Letters", volume 128, number 3, pp. 030501, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.128.030501>
- Preskill J., 2012, *Quantum computing and the entanglement frontier*, arXiv preprint, <https://arxiv.org/pdf/1203.5813>
- Santoro G. E., Tosatti E., 2006, *Optimization using quantum mechanics: quantum annealing through adiabatic evolution*, "Journal of Physics A: Mathematical and General", volume 39, number 36, pp. R393, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0305-4470/39/36/R01>
- Shor P., 1999, *Polynomial-time algorithms for prime factorization and discrete logarithms on a quantum computer*, "SIAM Review", volume 41, number 2, pp. 303 - 332, <https://doi.org/10.1137/S0036144598347011>
- Spagnolo N. *et al.*, 2014, *Experimental validation of photonic boson sampling*, "Nature Photonics", volume 8, number 8, p. 615 - 620, <https://www.nature.com/articles/nphoton.2014.135>
- Spagnolo N. *et al.*, 2023, *Non-linear boson sampling*, "npj Quantum Information", volume 9, number 1, p. 3, <https://www.nature.com/articles/s41534-023-00676-x>
- Spring J. B. *et al.*, 2013, *Boson sampling on a photonic chip*, "Science", vol. 339, number 6121, p. 798 - 801, https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.1231692?casa_token=TevB8r6fGEEAAAAA%3Af0Jbs1Qg79OgZrrzO7BU3nVyBFeyFV-Qy8BzGC0nW7p7FkMjz_WK2EPA1vXTETZptppNTHjhX23xMBg
- Tillmann M. *et al.*, 2013, *Experimental boson sampling*, "Nature Photonics", volume 7, number 7, p. 540 - 544, <https://www.nature.com/articles/nphoton.2013.102>
- Tindall J. *et al.*, 2024, *Efficient tensor network simulation of IBM's Eagle kicked Ising experi-*

- ment, "PRX Quantum", volume 5, number 1, pp. 010308, <https://doi.org/10.1103/PRXQuantum.5.010308>
- Vandersypen L. M. K. *et al.*, 2001, *Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance*, "Nature", volume 414, number 6866, pp. 883 - 887, <https://doi.org/10.1038/414883a>
- Wang H. *et al.*, 2017, *High-efficiency multiphoton boson sampling*, "Nature Photonics", volume 11, number 6, p. 361 - 365, <https://www.nature.com/articles/nphoton.2017.63>
- Wang H. *et al.*, 2018, *Toward scalable boson sampling with photon loss*, "Physical Review Letters", volume 120, number 23, p. 23502, <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.120.230502>
- Wang H. *et al.*, 2019, *Boson sampling with 20 input photons and a 60-mode interferometer in a 10^{14} -dimensional Hilbert space*, "Physical Review Letters", volume 123, number 25, pp. 250503, <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.250503>
- Yu S. *et al.*, 2023, *A universal programmable Gaussian boson sampler for drug discovery*, "Nature Computational Science", volume 3, number 10, p. 839 - 848, <https://www.nature.com/articles/s43588-023-00526-y>
- Zhong H.-S. *et al.*, 2020, *Quantum computational advantage using photons*, "Science", volume 370, number 6523, p. 1460 - 1463, https://www.science.org/doi/full/10.1126/science.abe8770?casa_token=pJPu60TAj7sAAAAA%3AMAad4koMj7_3rULAYg-6ZIlkZ-m_LRJe6Kt3pL1zhco6j6lZMDZ4vIjH6gieE_G0VFmKM_MzKpf2POIBL
- Zhong H.-S. *et al.*, 2021, *Phase-programmable Gaussian boson sampling using stimulated squeezed light*, "Physical Review Letters", volume 127, number 18, p. 180502, <https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.127.180502>

Sitografia

- (a) Pagina web dell'azienda Fujitsu dedicata al *digital annealing*: <https://www.fujitsu.com/global/services/business-services/digital-annealer/>
- (b) Dati sulla distribuzione delle altezze nel mondo dal sito di Our World in Data: <https://ourworldindata.org/human-height#:~:text=The%20normal%20distribution%20of%20heights,%3B%20and%2099.7%25%20within%20three.>
- (c) Pagina del sito web del gruppo di ricerca del Prof. Fabio Sciarrino dell'Università di Roma La Sapienza dedicata al Boson Sampling su piattaforme fotoniche: <https://www.quantumlab.it/boson-sampling-with-integrated-photonics/>

GENNAIO 2025

Stampa a cura di
Scripta sc - Rovereto (TN)
idea@scriptasc.it
www.scriptasc.it



ISSN 1124-0350

2024
ser. X
vol. VI, B

Atti della Accademia Roveretana degli Agiati