

Giovanni Garberoglio

Meccanica quantistica di oggetti macroscopici. II. Superconduttività

ABSTRACT: *Quantum Mechanics of Macroscopic Objects. II. Superconductivity.*

Quantum Mechanics is generally considered a theory of atomic and subatomic systems. Nevertheless, some consequences can be observed also in objects so large that they can be easily seen with the naked eye. In this brief paper we discuss the history of superconductivity, a phenomenon originally observed in metals and subsequently reproduced in many other solid-state systems. The Holy Grail of this research is developing a material exhibiting superconductivity at ambient conditions.

KEY WORDS: Quantum Mechanics; Superconductivity; Cooper pairs.

RIASSUNTO: La Meccanica Quantistica è generalmente considerata una teoria valida solo a livello atomico e subatomico. In realtà alcune conseguenze sono direttamente apprezzabili in oggetti macroscopici, ovvero visibili ad occhio nudo. In questa comunicazione ripercorriamo la storia del fenomeno della superconduttività, originariamente osservato nel caso di metalli e successivamente riprodotto in svariati altri materiali. Il Santo Graal di questa ricerca è ottenere un materiale superconduttore in condizioni ambientali.

PAROLE CHIAVE: Meccanica Quantistica; Superconduttività; Coppie di Cooper.

Una curiosa transizione di fase

Nel precedente articolo di questa serie (Garberoglio, 2021) abbiamo fatto la conoscenza del laboratorio di basse temperature di Heike Kamerlingh Onnes presso l'Università di Leida in Olanda dove, nel 1908, vennero raggiunte temperature sufficientemente basse da poter liquefare, per la prima volta, l'elio.

Ma questa non fu l'unico risultato degno di nota raggiunto nel laboratorio di Kamerlingh Onnes.

Parecchie proprietà delle sostanze che ci circondano presentano una spiccata dipendenza dalla temperatura e in molti casi si osserva una diminuzione delle prestazioni per temperature più elevate. Questo è particolarmente evidente nel caso della conduzione di corrente elettrica I nei metalli, che è proporzionale alla differenza di potenziale V che viene applicata (ad esempio, con una pila) secondo la nota legge $V = RI$: sotto l'effetto di una differenza di potenziale gli elettroni sono soggetti, per via della seconda legge di Newton, ad un'accelerazione che viene però contrastata dagli urti casuali con gli atomi di cui sono fatti i metalli. L'effetto di queste due opposte tendenze è quello di produrre una corrente I dove gli elettroni si muovono con velocità costante.

Dal momento che la temperatura misura il moto "caotico" degli atomi della sostanza a cui si riferisce, si può intuire come la resistenza R sia una funzione crescente della temperatura del metallo.

Per diverse applicazioni tecnologiche, come ad esempio la distribuzione di energia elettrica, è molto utile che la resistenza incontrata dalla corrente sia la minore possibile, in modo da diminuire perdite durante la trasmissione. Tra i metalli di uso comune (cioè abbastanza abbondanti da essere economicamente sostenibili) il rame è quello con la resistenza minore, caratteristica che rende ragione della sua diffusione.

I valori della resistenza dei vari metalli erano già noti alla fine del XIX secolo, quando si iniziò a creare l'infrastruttura di distribuzione dell'energia elettrica su larga scala. Era invece assai meno nota una dettagliata descrizione microscopica dei vari fenomeni alla base della resistenza elettrica. Il contributo della temperatura (quindi, del moto "caotico") era ben apprezzato, ma per cercare di capire "cosa mai stesse accadendo là sotto" era sicuramente ragionevole investigare nel modo più dettagliato possibile il comportamento della resistenza al diminuire del moto caotico. Si sarebbe annullata, oppure sarebbe rimasta una resistenza "intrinseca"? E, nel caso, cosa la determinava? Come avremmo potuto ridurla?

Probabilmente erano tutte queste le domande che portarono Kamerlingh Onnes a studiare il comportamento resistivo di vari elementi fino ad arrivare, nel 1911, ad investigare il mercurio.

L'8 aprile di quell'anno venne fuori una scoperta del tutto inaspettata. In tutte le sostanze note fino a quel momento la resistenza diminuiva in maniera lineare con la temperatura fino a raggiungere un valore costante, dipendente dal tipo di metallo, dalla sua purezza e – in certi casi – persino dal metodo di lavorazione.

Nel mercurio, invece, Kamerlingh Onnes osservò che la resistenza *si*

annullava bruscamente quando la temperatura scendeva al di sotto dei 4.2 gradi Kelvin (corrispondente a -269 gradi nella comune scala Celsius).

Il mercurio si mostrò ben lungi dall'essere l'unico materiale a presentare questo stupefacente fenomeno: lo stesso si osservò ben presto nel piombo (a 7 K) e persino in materiali composti, come il nitrato di niobio (a 16 K). Ad oggi sono noti un centinaio di materiali che presentano la stessa caratteristica.

Fenomeni elettromagnetici “super”

L'inaspettata osservazione dell'annullamento della resistenza al passaggio di corrente, per quanto a temperature molto basse, solleticò immediatamente l'interesse di parecchi gruppi di ricerca, sia sperimentali che teorici.

Un'osservazione che si è poi rivelata cruciale per comprendere il fenomeno della superconduttività fu fatta da Walther Meissner e Robert Ochsenfeld nel 1933: l'annullamento della resistenza alla corrente era accompagnato dall'espulsione del campo magnetico dall'interno del materiale, fenomeno noto col nome di *diamagnetismo perfetto*. Questa osservazione rese immediatamente chiaro che la transizione a bassa temperatura non era soltanto una transizione verso uno stato di conduttore *perfetto* (senza resistenza), ma qualcosa di più complicato. Un *superconduttore*, appunto.

Dal punto di vista teorico, il fenomeno della superconduttività fa intervenire disparati effetti fisici: elettromagnetici, per via della resistenza nulla e l'effetto Meissner, termodinamici, dal momento che è una transizione di fase, e – anche nel 1930 questo era poco apprezzato – quantomeccanici.

Un'applicazione diretta delle equazioni di Maxwell, che regolano i fenomeni elettromagnetici, ad un conduttore *perfetto* permette di dimostrare che questa transizione dovrebbe essere accompagnata ad una sorta di “congelamento” del campo magnetico all'interno del conduttore: qualsiasi tentativo di modificarlo (ad esempio, tramite l'uso di magneti esterni) induce correnti che annullano le variazioni del campo magnetico all'interno del conduttore perfetto, in modo che il campo magnetico presente prima della transizione rimane costante. In un superconduttore, invece, il campo magnetico viene espulso e rimane nullo al variare delle condizioni esterne.

Modelli fenomenologici: London e Ginzburg-Landau

In parallelo agli studi sperimentali, volti sia a identificare nuovi materiali superconduttori che a caratterizzare le proprietà dello stato superconduttivo, i fisici teorici si misero all'opera per comprendere l'origine della supercondut-

tività. Come spesso accade in fisica quando ci si trova di fronte a fenomeni inaspettati, l'approccio teorico è duplice: fenomenologico e da principi primi.

Le teorie fenomenologiche sono generalmente basate sullo sviluppo di modelli che da un lato considerano le conoscenze fisiche ben stabilite, mentre dall'altro non si fanno problemi ad introdurre il risultato di intuizioni o modificazioni euristiche che permettano però di interpretare *quantitativamente* i fenomeni evidenziati in laboratorio.

In un certo senso la fenomenologia è l'aspetto "artistico" della scienza, e nel caso dei superconduttori è sicuramente degna di nota l'opera di due gruppi di fuoriclasse del settore.

Uno dei primi modelli fenomenologici della superconduttività venne presentato nel 1935 dai fratelli Fritz e Heinz London (London, 1935). Se il nome London è familiare ai miei ventidue lettori, è perché Fritz è lo stesso scienziato che nel 1938 intuì che il fenomeno della superfluidità era legato alla Condensazione di Bose-Einstein (Garberoglio, 2021).

Nel caso della superconduttività, i fratelli London si concentrarono sull'aspetto elettromagnetico del fenomeno. Come accennato più sopra, le equazioni di Maxwell prevedono un congelamento del campo magnetico nel caso di conduttore perfetto, in contrasto con le osservazioni di Meissner ed Ochsenfeld.

Ciò nonostante, i fratelli London riuscirono a mostrare nel 1935 che alcune considerazioni "ragionevoli" permettevano di riformulare le equazioni di Maxwell (unite alle equazioni di Newton per descrivere il moto delle cariche in presenza dei campi elettromagnetici) in modo da rendere conto dell'effetto Meissner.

Una delle caratteristiche fondamentali del modello dei London era di indicare che nei superconduttori la reazione alle variazioni del campo magnetico induce correnti superficiali localizzate in uno spessore di dimensione λ , nota come lunghezza di penetrazione, data da

$$\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n_s e^2}},$$

dove m è la massa degli elettroni, e la loro carica e n_s la densità di elettroni coinvolta nelle correnti superconduttive. Questo approccio, oltre a rendere quantitativo l'effetto Meissner, suggeriva relazioni ben precise fra le varie quantità fisiche presenti in un superconduttore.

Le equazioni di London avevano però una caratteristica inusuale, ovvero quella di introdurre quantità che apparentemente non rispettavano una proprietà fondamentale delle leggi di Maxwell, nota come l'invarianza di *gauge*.

Senza entrare troppo in dettagli tecnici, ci limitiamo qui a ricordare che le equazioni di Maxwell descrivono come i campi elettrico (\mathbf{E}) e magnetico (\mathbf{B}) sono determinati dalle cariche e dalle correnti elettriche. Queste equazioni si possono riformulare in termini di quantità più semplici, il potenziale elettrico (V) e il potenziale vettore (\mathbf{A}), che però hanno la proprietà di essere soggetti ad una certa arbitrarietà. Se i campi \mathbf{E} e \mathbf{B} sono direttamente misurabili e quindi non ambigui (né teoricamente, né sperimentalmente), i potenziali sono invece indeterminati, nel senso che esistono una serie di trasformazioni matematiche – le cosiddette trasformazioni di *gauge* – a cui possono essere sottoposti senza che i campi fisici vengano modificati. Questa libertà di definire i potenziali è a volte molto utile per risolvere le equazioni di Maxwell in varie situazioni, ma non intacca le quantità osservabili (ad esempio, densità o flusso di energia) che vengono derivate dalle soluzioni ottenute tramite V ed \mathbf{A} . Non importa quale specifica trasformazione di gauge si decida di fare, tutte le proprietà fisiche descritte dai potenziali rimangono invariate.

Nel caso delle equazioni di London, invece, l'invarianza di gauge non viene verificata, ma diverse quantità presenti nel modello, come ad esempio la corrente superconduttiva, hanno senso solo all'interno di una specifica scelta della trasformazione di gauge.

Tuttavia, parecchie conseguenze delle equazioni di London, come ad esempio la lunghezza di penetrazione λ , risultano essere invarianti per scelta di gauge, rendendole utilissime come primo modello per razionalizzare ed investigare le proprietà dei superconduttori.

Il secondo dei modelli fenomenologici degni di nota riguardo alle proprietà dei superconduttori venne proposto parecchi anni dopo, nel 1950, da Vitaly L. Ginzburg e Lev D. Landau (Ginzburg *et al.*, 1950). I venti lettori arrivati a questo punto si ricorderanno di Landau come uno dei più prominenti fisici sovietici del dopoguerra, che ha sviluppato, tra l'altro, un altro modello fenomenologico utilissimo per descrivere la superfluidità (Garberoglio, 2021; Khalatnikov, 2000).

La teoria di Ginzburg-Landau affronta magistralmente tutte le questioni evidenziate dal fenomeno della superconduttività: la risposta elettromagnetica, la transizione di fase, e gli effetti quantistici. Nel 1950 la meccanica quantistica era una teoria con un buon grado di sviluppo, e dopo i successi interpretativi nel campo dei fenomeni atomici (Garberoglio, 2016), aveva contribuito a comprendere parecchie questioni relative alla materia condensata, come ad esempio le condizioni per cui le sostanze si presentano come conduttori o isolanti. Una descrizione microscopica dei materiali superconduttori, però, non era ancora stata sviluppata, e le questioni teoriche aperte

erano probabilmente molte di più che non le certezze. In questo clima sospeso fa il suo ingresso trionfante il modello di Ginzburg-Landau. Permettete-mi di mostrare questo capolavoro in tutta la sua gloria matematica, con un minimo di traduzione in italiano corrente:

$$f_s = f_n + \alpha(T)|\psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*} \left| \left(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}\mathbf{A} \right) \psi \right|^2 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}.$$

Le quantità f_s e f_n sono, rispettivamente, le densità di energia libera dello stato superconduttore e dello stato normale. Dal momento che la termodinamica stabilisce che tutti i sistemi fisici tendono allo stato con minore energia, la transizione superconduttiva avviene se e quando $f_s < f_n$. Le quantità $\alpha(T)$ e $\beta(T)$ sono due parametri fenomenologici che caratterizzano il modello. Il loro valore dipende dallo specifico materiale considerato; non sono determinate dalla teoria (per via del suo carattere fenomenologico), ma dipendono dallo specifico materiale che si considera ed è necessario misurarle caso per caso.

La quantità ψ è, nell'ottica del modello, una funzione generalmente complessa che funge da parametro d'ordine: nel caso di un sistema nello stato di conduttore normale si ha $\psi = 0$, mentre nello stato superconduttivo la funzione ψ è diversa da zero. La presenza della costante di Planck \hbar nell'equazione indica che ψ è una funzione di natura quantistica il cui modulo quadrato può essere identificato con n_s , cioè la densità (numerica) delle particelle responsabili della superconduzione (qualsiasi esse siano, il modello non lo specifica); la variazione della fase è invece legata alla presenza o meno di corrente superconduttiva.

Gli ultimi due addendi al lato destro dell'equazione descrivono la relazione tra il parametro d'ordine ed il campo magnetico (\mathbf{B} , osservabile) o il suo potenziale (\mathbf{A} , non osservabile, ma utile come ausilio matematico per risolvere le equazioni), con una espressione che rispetta l'invarianza di gauge (per chi ha l'occhio matematico allenato): in particolare, le inevitabili ambiguità della definizione di \mathbf{A} possono essere "riassorbite" nella definizione della fase della funzione ψ (che non è, a sua volta, direttamente osservabile) in modo che tutte le quantità fisicamente rilevanti (come ad esempio la corrente superconduttiva o la densità dei portatori di carica) risultino indipendenti dalla specifica scelta di gauge, come ci si aspetta.

Compagnano infine altri parametri, e^* e m^* , che corrispondono alla carica elettrica e alla massa dei portatori di carica coinvolti nelle correnti superconduttive.

Il modello, nella sua struttura generale, prevede che il parametro d'ordine possa variare spazialmente, ed una disamina completa delle sue soluzioni è sicuramente oltre allo scopo di queste brevi note (oltre che probabilmente

superiore alle possibilità di chi scrive). È però possibile fare alcune considerazioni interessanti ed illustrative di cosa si intenda con modello fenomenologico e quali siano le deduzioni che se ne possono trarre, anche solo supponendo di avere a che fare con situazioni in cui il parametro d'ordine ψ assume un valore costante, che chiameremo ψ_0 , all'interno del superconduttore, e si è in presenza di un campo magnetico \mathbf{B} altrettanto uniforme.

In questo caso, il quarto termine al membro destro dell'espressione dell'energia libera si annulla, e l'energia libera assume la forma

$$f_s = f_n + \alpha(T)|\psi_0|^2 + \frac{1}{2}\beta(T)|\psi_0|^4 + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}.$$

Questa semplice espressione permette già di trarre alcune interessanti deduzioni. Innanzitutto notiamo che affinché possa essere verificata la condizione di transizione alla superconduttività, $f_s < f_n$, la somma degli ultimi tre membri a destra deve essere negativa. In assenza di campo magnetico ($\mathbf{B}=0$) questa condizione può essere verificata se $\beta(T)$ è una funzione positiva della temperatura e $\alpha(T)$ cambia segno da positiva a negativa al di sotto della temperatura di transizione T_c . In questo caso si è soliti scrivere $\alpha(T) = \alpha_0(T - T_c)$ con α_0 costante positiva. Nel caso in cui $\alpha(T)$ sia negativo, l'energia dello stato superconduttivo ha un minimo quando il parametro d'ordine vale $|\psi_0|^2 = n_s = -\frac{\alpha}{\beta}$ e l'equazione per l'energia libera diventa, re-introducendo un campo magnetico nell'equazione,

$$f_s - f_n = -\frac{\alpha^2}{2\beta} + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}.$$

Questi passaggi permettono già di fare una importante deduzione: aumentando il campo magnetico \mathbf{B} si dovrebbe assistere alla scomparsa del fenomeno della superconduttività (dal momento che ad un certo punto si arriva a $f_s > f_n$), e il materiale dovrebbe tornare allo stato normale per campi magnetici superiori a $B_c^2 = 4\pi\frac{\alpha^2}{\beta}$. Questa proprietà è effettivamente verificata per vari tipi di superconduttore (i cosiddetti superconduttori di tipo I) corroborando quindi la validità del modello. Da queste semplici equazioni emerge la natura fenomenologica del modello: per ogni materiale specifico è necessario effettuare alcune misure (ad esempio, la densità dei portatori di carica (n_s) e del campo magnetico critico (B_c)) i cui valori permettono di fissare le quantità specifiche per il materiale sotto considerazione (ad esempio, α e β). Altre considerazioni permettono di scoprire cosa misurare per fissare i valori

di e^* e m^*). Da questo punto in poi ogni risultato ottenibile dal modello è una “predizione” che – se verificata – permette di corroborarlo, e/o di stabilire in quali condizioni il modello sia valido oppure no.

Il modello di Ginzburg-Landau permette anche di studiare cosa succede nel caso in cui il parametro d'ordine ψ sia una funzione variabile della posizione. In questo caso, la teoria mostra che è possibile anche avere altri tipi di superconduttore (chiamati superconduttori di tipo II), per cui all'aumentare del campo magnetico si crea uno stato misto dove alcune zone del materiale rimangono superconduttive, mentre altre ritornano allo stato normale. La teoria specifica inoltre le condizioni per cui un determinato materiale superconduttore è di tipo I o di tipo II.

Al momento della sua formulazione, il modello di Ginzburg-Landau permise di comprendere con efficacia quantitativa moltissime proprietà dei superconduttori come funzione solamente di alcuni parametri. Oltre a questo, studi approfonditi permisero di stabilire che il modello è quantitativamente valido solo per temperature che non si discostino troppo dalla temperatura di transizione superconduttiva.

Una domanda rimaneva però ancora senza risposta: “che cosa succede là sotto?”.

L'uso del modello interpretativo di Ginzburg-Landau portava a deduzioni abbastanza sorprendenti ed inaspettate. Abbiamo visto come il modello lasci libera la carica e^* dei portatori della corrente superconduttiva. L'aspettativa comune era che i portatori di carica nello stato superconduttivo fossero gli stessi portatori di carica dello stato normale, ovvero gli elettroni, e che quindi dovesse risultare $e^* = e$.

Gli esperimenti, invece, sembravano indicare che $e^* = 2e$ (Tinkham, 2004). La transizione superconduttiva doveva avere qualcosa a che fare col comportamento di *coppie* di elettroni. Ma come, esattamente?

E cosa c'entrava la meccanica quantistica, evocata dalla presenza della costante di Planck nelle equazioni di Ginzburg e Landau?

Che cosa succede là sotto?

Fermioni vs Bosoni

A differenza dei modelli fenomenologici, che si propongono di inquadrare in una cornice ragionevole il comportamento osservato, i modelli microscopici cercano di spiegare i fenomeni osservati a partire dalle leggi fondamentali della fisica. È solo grazie alla compatibilità (o meno) dei modelli microscopici con

le osservazioni che si può acquistare fiducia nelle (oppure rigettare le) equazioni fondamentali della fisica. E nel caso dei superconduttori le equazioni fondamentali in gioco sono solamente due: l'equazione di Schrödinger per il comportamento degli atomi (e dei loro costituenti, ovvero nuclei ed elettroni) presenti nei materiali superconduttori e le equazioni di Maxwell che descrivono come tutte queste particelle interagiscano coi campi elettromagnetici.

Negli anni '50 del secolo scorso, queste equazioni fondamentali e le relazioni tra di loro erano ben note e testate in innumerevoli esperimenti in tutti i laboratori del mondo. La questione forse più impellente era comprendere in che modo queste equazioni potessero rendere ragione dei fenomeni associati alla superconduttività.

Per analogia alla situazione dell'He-II (Garberoglio, 2021) si può supporre che in qualche modo anche gli elettroni subiscano una sorta di condensazione di Bose-Einstein dando origine alla funzione d'onda "macroscopica" le cui proprietà principali sono descritte dal modello di Ginzburg-Landau. Questa ipotesi, per quanto ragionevole, si scontra però con una proprietà fondamentale degli elettroni: a differenza degli atomi di ^4He , gli elettroni sono fermioni. Da un punto di vista fondamentale questo implica che la funzione d'onda per un insieme di elettroni è necessariamente *antisimmetrica*, ovvero acquista un segno negativo se le coordinate di una qualsiasi coppia di particelle viene scambiata:

$$\Psi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_N) = - \Psi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_N),$$

dove in questo caso abbiamo indicato con x_i tutte le variabili necessarie a specificare lo stato di un singolo elettrone, ovvero la sua posizione e il suo stato di *spin*. Senza entrare troppo nei dettagli di questa interessante faccenda, si può immaginare come un elettrone sia dotato non solo di carica elettrica, ma anche di un "momento magnetico" (lo *spin*, appunto) che è per certi versi equivalente all'ago di una bussola. Ago le cui posizioni sono, però, quantizzate: cercando di misurare l'allineamento con una direzione arbitraria (ad esempio, l'asse verticale), lo *spin* dell'elettrone si può trovare solamente in due stati, ovvero allineato (condizione spesso indicata convenzionalmente dicendo che lo *spin* è "positivo" e indicato con +) o anti-allineato (*spin* negativo, indicato quindi con -). In meccanica quantistica il numero di stati di *spin* possibili risulta essere $2s + 1$ dove è il cosiddetto numero quantico di *spin*, che può essere un numero intero oppure semi-intero (scrivibile nel secondo caso come $s = \frac{q}{2}$ con q dispari). Per un elettrone $s = \frac{1}{2}$, mentre per un atomo di ^4He si ha $s = 0$. Un teorema fondamentale afferma che le particelle con numero quantico di *spin* semi-intero sono necessariamente fermioni (ovvero la loro

funzione d'onda a molti corpi è antisimmetrica), mentre le particelle con *spin* intero (o nullo) sono necessariamente bosoni (e quindi la loro funzione d'onda è simmetrica).

La funzione d'onda a molti corpi di un sistema quantistico è un oggetto estremamente complicato e difficile da calcolare, specialmente se lo si desidera fare in maniera accurata. Anche coi computer più potenti attualmente esistenti, calcoli "esatti" (ovvero senza approssimazioni non controllate) per sistemi fermionici si limitano a poche decine di particelle. Un modo molto efficace e pratico per visualizzare la funzione d'onda di un sistema a molti corpi si basa sul concetto di matrici densità ridotte. La "matrice densità ridotta ad un corpo" è una quantità perfettamente definita per ogni funzione d'onda e permette di calcolare funzioni d'onda efficaci di singola particella e le loro occupazioni (Garberoglio, 2021).

Nel caso di bosoni, le occupazioni possono anche essere macroscopiche come nel caso della condensazione di Bose-Einstein, ma nel caso di fermioni il teorema di Yang (Yang, 1962) afferma che le occupazioni possono essere al massimo di una particella per stato. Il fenomeno della condensazione di Bose-Einstein è impossibile.

Nel caso degli elettroni in un metallo, la struttura fermionica della funzione d'onda può essere visualizzata nel seguente modo: gli stati possibili sono caratterizzati dal valore della proiezione dello *spin* lungo una direzione arbitraria (ad esempio, l'asse verticale) e dalla "velocità" (tecnicamente, la quantità di moto). Gli elettroni occupano pertanto tutte le funzioni d'onda di singola particella che rappresentano una velocità ben determinata (in modulo e direzione), nella misura di due per stato (un elettrone con *spin* positivo ed un altro con *spin* negativo). Lo stato "fondamentale" del sistema è quello per cui gli elettroni si distribuiscono secondo una sfera di volume minimo nello spazio delle velocità: per ogni elettrone che va a sinistra ce n'è un altro che va a destra con la stessa velocità. Questa sfera si chiama sfera di Fermi e l'energia corrispondente alla velocità massima si chiama energia di Fermi del sistema. In questo caso, il sistema fermionico si dice *degenerare*: le sue proprietà sono determinate dalle proprietà di antisimmetria della funzione d'onda (che matematicamente risulta essere il determinante delle funzioni d'onda di singola particella). I sistemi fermionici diventano *non degeneri* quando i numeri di occupazione risultano molto più vicini a zero invece che a uno. Questo avviene ad esempio aumentando la temperatura: quando l'energia cinetica dovuta alla temperatura risulta paragonabile all'energia di Fermi, la sfera di Fermi si ingrandisce diventando sempre più rarefatta con la conseguenza che le proprietà di antisimmetria della funzione d'onda sono progressivamente meno evidenti.

Ritornando allo stato fondamentale (quello ad energia più bassa) degli elettroni in un metallo, un modo compatto per rappresentarlo matematicamente è quello di scrivere

$$|\Psi_F\rangle = \prod_{v,s} a_{v,s}^\dagger |0\rangle,$$

dove $|0\rangle$ rappresenta lo stato dove non ci sono elettroni, mentre $a_{v,s}^\dagger$ indica l'aggiunta di un elettrone con velocità v e *spin* s (matematicamente, $a_{v,s}^\dagger$ è un operatore), mentre il prodotto \prod è fatto per tutte quelle velocità la cui energia è minore dell'energia di Fermi e per tutti gli *spin* (ovvero quando la variabile s assume i valori '+' e '-').

In questo modo di scrivere lo stato quantistico a molti corpi, la proprietà di antisimmetria è legata alle proprietà degli operatori $a_{v,s}^\dagger$ che "anticommutano" per elettroni in stati diversi, ovvero $a_{v,s}^\dagger a_{w,t}^\dagger = -a_{w,t}^\dagger a_{v,s}^\dagger$.

Questa rappresentazione vale ovviamente per tutti i fermioni, compreso l'isotopo ^3He dell'elio. Dal momento che è composto da fermioni, il liquido ^3He non effettua la condensazione di Bose-Einstein e non presenta una transizione superfluida (almeno in condizioni comparabili a quelle dell'isotopo pesante ^4He). I sistemi fermionici "degeneri", invece, presentano notevoli similarità dinamiche, dovute alla rigidità dello stato fondamentale indotto dalla presenza della sfera di Fermi. Permettetemi solo di accennare al fatto che esiste un'eccellente teoria fenomenologica per il liquido di Fermi "normale", anch'essa dovuta al genio di Landau (Pines *et al.*, 1989).

I modelli microscopici di Bardeen-Cooper-Schrieffer e Bogoliubov-de Gennes

Lo sviluppo di un modello microscopico per la transizione superconduttiva si scontrò per molto tempo con la difficoltà di immaginare processi che potessero rendere conto del necessario cambiamento nella struttura della sfera di Fermi.

Lo "stato fondamentale" degli elettroni in un metallo tipico presenta una sfera di Fermi occupata fino ad energie cinetiche dell'ordine di (approssimativamente) 5 eV, che corrispondono alla velocità tipica di elettroni alla temperatura di più di 50000 K. In condizioni di temperatura ambiente (circa 300 K), gli elettroni si spalmano solo leggermente in una buccia di dimensioni molto ridotte nella zona più esterna della sfera di Fermi, e le loro possibilità dinamiche risultano molto intralciate dalla presenza di numerosi stati occupati. Solo gli elettroni della "buccia" interagiscono tra di loro, mentre gli altri rimangono ad occupare il resto della sfera di Fermi, da cui niente può uscire per via del fatto che verrebbe richiesta un'energia molto maggiore di quella disponibile, e in cui niente può entrare perché gli stati sono tutti occupati; queste proprietà sono alla base della teoria

fenomenologica di Landau, che non prevede alcun fenomeno anche minimamente analogo alla superconduttività.

Nel 1956, però, il fisico americano Leon Cooper pubblicò alcune considerazioni dall'apparenza un po' accademica: i suoi calcoli mostrarono che l'aggiunta di una qualsiasi interazione anche minimamente attrattiva fra gli elettroni avrebbe come risultato la creazione di stati di *coppie* di elettroni con energia minore dell'energia di Fermi. Ma quale interazione?

Gli elettroni sono particelle cariche negativamente, quindi la loro mutua interazione elettrostatica è repulsiva. In un metallo però sono presenti anche nuclei atomici carichi positivamente e il risultato netto è quello di un solido stabile (ed eventualmente conduttore). Cooper si rese conto, basandosi su considerazioni proposte dal fisico americano John Bardeen, che sebbene gli elettroni respingano altri elettroni, attraggono invece i nuclei e questa attrazione può creare stati oscillatori più o meno localizzati del reticolo cristallino (i cosiddetti fononi) i quali agiscono da tramite tra gli elettroni per produrre un'interazione attrattiva efficace e quindi la formazione di coppie stabili.

La scoperta di questo meccanismo aprì la via ad una possibile spiegazione microscopica della superconduttività: un elettrone è un fermione, ma una *coppia* legata si comporta effettivamente come un *bosone* dal momento che lo *spin* totale è zero (per *spin* individuali antiparalleli) oppure uno (per *spin* individuali paralleli). In un certo senso, quindi, le coppie possono essere soggette a fenomeni analoghi alla condensazione di Bose-Einstein.

La dimostrazione che effettivamente questo può avvenire in un metallo fu data l'anno successivo dagli stessi Cooper e Bardeen, in collaborazione con un altro fisico americano, John R. Schrieffer (Bardeen *et al.*, 1957). La teoria di Bardeen, Cooper e Schrieffer – nota come teoria BCS, dalle iniziali degli autori – propone una forma esplicita per la funzione d'onda a molti corpi basata sull'idea della presenza di coppie. Sperando di non spaventare troppo i miei ormai dodici lettori, permettetemi di scrivere la rappresentazione dello stato BCS a molti corpi:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_v (u_v + w_v a_{v,+}^\dagger a_{-v,-}^\dagger) |0\rangle,$$

che è utile confrontare con la struttura di $|\Psi_F\rangle$, che rappresenta invece lo stato di di conduttore normale. Nel caso BCS si vede come lo stato a molte particelle sia costruito aggiungendo allo stato di vuoto *coppie* di elettroni con velocità e *spin* opposte (rappresentate dai due operatori $a_{v,+}^\dagger a_{-v,-}^\dagger$), invece che singoli elettroni (un solo operatore $a_{v,s}^\dagger$ nella rappresentazione della funzione d'onda dello stato di Fermi “normale”). La quantità w_v rappresenta l'ampiezza-

za di probabilità che lo stato di coppia sia occupato e, corrispondentemente, u_v è l'ampiezza di probabilità che lo stato non sia occupato (le due quantità non sono indipendenti, dal momento che sicuramente lo stato è occupato oppure no, quindi $|u_v|^2 + |w_v|^2 = 1$).

Il grosso della dimostrazione BCS (che non provo nemmeno a immaginare di riportare in questa sede) è quello di mostrare che in certe condizioni, che prevedono una specifica forma di interazione coi fononi del reticolo atomico del solido metallico, l'energia di uno stato nella forma $|\Psi_{BCS}\rangle$ è effettivamente minore di quella dello stato di Fermi "normale" $|\Psi_F\rangle$.

L'energia dello stato BCS (nota anche come *gap* e di solito indicato con la lettera Δ), e pertanto la temperatura di transizione, dipende dalla frequenza media delle vibrazioni del reticolo cristallino (i fononi, appunto), che a sua volta dipende dalle masse dei nuclei. In questo modo la teoria spiega quantitativamente la dipendenza (osservata sperimentalmente) della temperatura di transizione dalla composizione isotopica (quindi con atomi di masse diverse) di vari metalli.

La teoria BCS, originariamente sviluppata per conduttori omogenei, è stata successivamente estesa a sistemi disomogenei (come per esempio leghe o dispositivi, in cui Δ diventa una funzione della posizione) da Bogoliubov e De Gennes (De Gennes, 2018) e si è dimostrata fondamentale per comprendere l'origine del fenomeno della superconduttività e per numerose applicazioni.

Notiamo solo infine che alcuni anni dopo la pubblicazione della teoria BCS, Lev P. Gorkov riuscì a derivare in maniera rigorosa il modello di Ginzburg-Landau a partire da considerazioni microscopiche, chiarificando in maniera quantitativa il regime di validità di questo geniale approccio. Non dovrebbe a questo punto stupire il fatto che Bardeen, Cooper e Schrieffer ricevettero il premio Nobel nel 1972 per la scoperta del meccanismo microscopico della superconduttività.

Matrice densità ridotta a due corpi

La teoria BCS è sicuramente una pietra miliare nella spiegazione della superconduttività, ma presenta, da un punto di vista del rigore metodologico, alcune caratteristiche discutibili. Ad esempio, la funzione d'onda è scritta come sovrapposizione di stati con numeri diversi di particelle e quindi contrasta con alcune regole di "superselezione" della meccanica quantistica non-relativistica (Leggett, 2006). Un fondamento teorico decisamente più inattaccabile riguardo alla teoria BCS fu individuato dal già citato Yang (Yang, 1962) nelle proprietà della matrice densità ridotta *a due corpi* di un generico sistema di fermioni.

Ricordiamo che la matrice densità (nota anche come operatore statistico) è la descrizione più completa di un sistema quantistico (Garberoglio, 2021), e che

permette di trattare situazioni (come, ad esempio, stati termodinamici) per cui una descrizione basata solamente sulla funzione d'onda risulta impossibile. La matrice densità è in generale una quantità molto complicata, ma da cui si possono derivare, in maniera matematicamente naturale, quantità più semplici che descrivono le proprietà di particelle singole, di coppie, e così via. Queste quantità si chiamano matrici densità ridotte ad n corpi, e abbiamo già accennato come la matrice densità ad 1 corpo renda conto del fenomeno della condensazione di Bose-Einstein per i bosoni e della struttura della sfera di Fermi per i fermioni.

Nel 1962, Yang mostrò rigorosamente come nel caso di Fermioni la struttura della matrice densità a due corpi ($n=2$) è tale per cui, in certe condizioni, alcuni stati di coppia possono avere una occupazione macroscopica: sono proprio questi stati ad essere descritti (approssimativamente) dalla funzione d'onda BCS.

In generale, quindi, sistemi fermionici hanno la possibilità di presentare configurazioni in cui stati di coppia sono occupati in modo macroscopico: nel caso dei superconduttori, questi stati sono effettivamente le coppie di Cooper, ma effetti simili sono stati osservati anche in altri sistemi. Abbiamo accennato a come il liquido ^3He non presenta alcuna transizione di fase "superfluida" a temperature simili a quella dell'isotopo bosonico ^4He (ovvero intorno ai 2 gradi Kelvin), ma studi a temperature ultra basse (dell'ordine dei *millesimi* di grado Kelvin) hanno mostrato come anche il liquido ^3He presenta una transizione ad uno stato superfluido. Anzi, sono state evidenziate addirittura *due* fasi superfluide (chiamate convenzionalmente fase A e fase B). Questa osservazione mostra, da sola, come il meccanismo fisico responsabile di questa transizione sia necessariamente diverso da quello descritto dalla funzione BCS, ma risulta perfettamente inquadrabile in considerazioni basate sulla matrice densità ridotta a 2 corpi (Leggett, 2006).

Permettetemi di concludere questa sezione menzionando una interessante caratteristica della matrice densità ridotta a 2 corpi e che è ancora oggetto di ricerche fondamentali. Come accennato, questa quantità è – da un punto di vista matematico – molto più semplice da trattare che non una funzione d'onda a molti corpi. Nel 1962 il fisico americano Charles Coulson si rese conto che tutti i problemi di chimica quantistica (e pertanto, lo studio di tutte le proprietà di molecole e materiali) possono essere riformulati in modo che la matrice ridotta a 2 corpi sia l'unica incognita presente e propose quindi di usare questa quantità, invece che le funzioni d'onda a molti corpi, come oggetto di studio. L'uso della matrice ridotta a due corpi permette – in linea di principio – una soluzione dei problemi con risorse computazionali molto minori di quelle necessarie con approcci basati sulle funzioni d'onda.

La proposta, teoricamente ineccepibile, si è però subito scontrata con alcune

questioni, ancora irrisolte, relative alla sua rappresentabilità: le matrici densità ridotte a 2 corpi sono soggette ad alcuni vincoli, che descrivono il fatto che esse derivano da una funzione d'onda a molti corpi. Purtroppo, la precisa formulazione matematica di questi vincoli non è a tutt'oggi nota e pertanto soluzioni basate sulla matrice densità ridotta sono soggette ad incertezze incontrollate che spesso portano a risultati errati o fuorvianti (Mazziotti, 1989).

Applicazioni (passate, presenti e future)

Magneti superconduttori

I materiali superconduttori non sono solamente una curiosità scientifica, da trovarsi solo all'interno di laboratori specializzati. Come abbiamo visto, i superconduttori permettono il passaggio di corrente senza resistenza, ovvero senza che gli stessi si riscaldino come ad esempio fanno le lampadine a filamento. Questa proprietà permette di utilizzare altissimi flussi di corrente elettrica che a loro volta, per via delle leggi di Maxwell, permettono di generare campi magnetici di altissima intensità.

Uno degli utilizzi più comuni di forti campi magnetici si ha nella tecnica diagnostica della risonanza magnetica. Questa procedura permette di ottenere immagini ad alta risoluzione di organismi viventi senza esposizione a radiazioni ionizzanti e si basa sull'uso di campi magnetici per orientare lo *spin* dei nuclei atomici, il cui successivo rilassamento è usato come indicatore della densità del materiale (tessuto). Esistono in commercio diversi macchinari in grado di effettuare risonanze magnetiche: alcuni usano magneti "tradizionali", ma quelli più potenti e precisi generano i campi magnetici grazie a materiali che vengono portati allo stato superconduttivo tramite raffreddamento ad elio liquido. L'elio è l'unica sostanza che rimane liquida alle basse temperature necessarie per ottenere la transizione superfluida, e può quindi essere usato come fluido di raffreddamento.

Magneti basati su superconduttori sono anche responsabili delle altissime prestazioni dei collisori di particelle, come il famoso Large Hadron Collider (LHC) del CERN di Ginevra. In questo laboratorio, protoni e antiprotoni vengono fatti circolare in un tubo sotterraneo di quasi 27 chilometri di lunghezza e focalizzati nelle stanze (sempre sotterranee) dove sono allestiti gli esperimenti di fisica teorica che ricostruiscono le proprietà delle interazioni subnucleari grazie all'analisi accurata dei prodotti risultanti dallo scontro di protoni e antiprotoni. Date le altissime energie in gioco, sono necessari campi magnetici allo stato dell'arte per poter curvare le particelle e mantenerle nella traiettoria prevista, e anche in questo caso vengono usati magneti superconduttori.

Rivelatori ultraprecisi

Un altro utilizzo importantissimo dei materiali superconduttori si ha nella sensoristica. In questo caso più che la presenza della supercorrente *tout court*, si utilizzano le proprietà quantizzate della stessa. Analogamente alla quantizzazione del momento angolare dei superfluidi (Garberoglio, 2021) la corrente che può circolare in microscopici anelli superconduttori è legata in maniera discreta al flusso del campo magnetico che ad essi è connesso, e questo fenomeno può essere usato per effettuare misure ultraprecise di campi magnetici.

Microscopici anelli di materiale superconduttore inframezzati da conduttori “normali” che permettono di connettere il sistema ad apparecchiature elettroniche di controllo e misura si chiamano, in gergo, SQUID dalle iniziali del termine inglese *Superconducting QUantum Interference Device* (dispositivo superconduttore a interferenza quantistica).

Oltre ad essere usati come strumenti di misura, questi dispositivi permettono anche di generare stati quantistici di corrente ben definiti e controllabili tramite dispositivi elettronici. Per questo motivo costituiscono una delle piattaforme più in voga per sfruttare proprietà quantistiche al fine di trasmettere e processare informazione, ricerche che hanno, in prospettiva, l’obiettivo di costruire un vero e proprio computer quantistico.

Così come il funzionamento dei computer classici è basato su circuiti che possono essere negli stati “acceso” oppure “spento” (bit), il funzionamento dei computer quantistici si basa su circuiti che possono essere in *sovrapposizione* di due stati diversi (chiamati, anch’essi convenzionalmente, “acceso” e “spento”) e che, tra di loro, possono formare stati *entangled*. Sovrapposizione ed *entanglement* sono due caratteristiche peculiari dei sistemi quantistici (Garberoglio, 2016) che, se da un lato richiedono risorse esponenzialmente grandi per una loro modellizzazione con computer tradizionali, dall’altro offrono la possibilità di aumentare esponenzialmente le possibilità di elaborare informazione qualora la naturale decoerenza di questi sistemi possa venir controllata o comunque ridotta.

Superconduttori ad alta temperatura critica

Inizialmente, lo studio della superconduttività ebbe come scopo quello di stabilire quali tra gli elementi della tavola periodica manifestino questo comportamento. I primi studi stabilirono che parecchi elementi presentavano una transizione superconduttiva, tutti sotto i 10 K. Alcuni studi evidenziarono come la pressione fosse un fattore importante per determinare o meno la transizione, e questo permise di trovare materiali superconduttori a temperature leggermente più alte. Ad esempio, lo zolfo ha una transizione superconduttiva a circa 17 K di temperatura, ma necessita di una pressione di circa

90 GPa, che corrisponde a circa *1 milione* di volte la pressione atmosferica. Queste pressioni così alte sono raggiungibili solo per campioni molto piccoli, opportunamente compressi tra strati di diamante.

Come abbiamo accennato parlando della risonanza magnetica, le basse temperature necessarie per la transizione superconduttiva sono raggiungibili solamente usando l'elio come refrigerante cosa che implica l'uso di apparati di raffreddamento relativamente molto costosi e impegnativi in termini energetici.

Per molti anni si è cercato di trovare materiali superconduttori a temperatura più alta: da un punto di vista applicativo sarebbe già molto utile arrivare a temperature di transizione di 77 K (ovvero circa 196 gradi sotto lo zero della scala Celsius di uso comune), cosa che permetterebbe l'utilizzo dell'azoto liquido (molto più abbondante e a buon mercato dell'elio) come liquido di raffreddamento. La teoria BCS non pone di per sé alcun limite alla temperatura critica, che dipende solamente dalla più o meno forte interazione tra gli elettroni e i fononi del reticolo cristallino. La caccia ai superconduttori "ad alta temperatura critica" (maggiore cioè di 77 K) era aperta.

Nel 1986 il gruppo di Bednorz e Müller, del centro ricerche IBM di Zurigo, fece un interessante passo avanti, mostrando che alcuni composti ceramici a base di ossidi di rame diventavano superconduttori a 35 K. Questa scoperta ispirò parecchi altri ricercatori, e l'anno successivo il gruppo di Paul Ching Wu Chu dell'Università dell'Alabama esibì per la prima volta un materiale superconduttore "ad alta temperatura critica", 93 K, noto come YBCO, anch'esso con struttura ceramica basato su ossidi di rame.

Queste scoperte ebbero conseguenze degne di nota su almeno due fronti.

Il primo è quello più specificatamente teorico: in molti casi le caratteristiche della transizione superconduttiva di questi materiali confliggono coi risultati della teoria BCS "originale". Una delle caratteristiche che non sembrano soddisfatte è quella del cosiddetto "accoppiamento in onda s " evidenziato, nella formula $|\Psi_{BCS}\rangle$ per riportata sopra, dal fatto che una coppia di Cooper è formata da elettroni con velocità v e $spin +$ accoppiati con elettroni a velocità $-v$ e $spin -$. In generale, sono possibili altri tipi di accoppiamento in cui velocità e $spin$ sono legati tra di loro da relazioni più complicate. Parecchi risultati mostrano che probabilmente il tipo di accoppiamento presente in alcuni di questi materiali è di tipo "onda d ", molto più complicato da studiare (teoricamente e sperimentalmente) di quello di tipo s della formulazione BCS originaria.

Giusto mentre stavo finalizzando questa comunicazione, è comparso un articolo di rassegna relativamente a uno di questi superconduttori "esotici", noto come Sr_2RuO_4 , che sebbene venga studiato da oltre 30 anni è ancora per molti versi avvolto da un'aura di mistero (Maeno, 2024).

Oltre agli aspetti scientifici, la storia dei superconduttori ad alta temperatura è anche una finestra sulla natura profondamente “umana” della ricerca. La possibilità di sviluppare un superconduttore a temperatura ambiente è una delle promesse più ambiziose della scienza moderna, il cui successo porterebbe a enormi ricadute economiche e tecnologiche. Prendendo come esempio la distribuzione dell’energia elettrica, eliminare le perdite, attualmente pari a circa il 5% del totale, significherebbe risparmiare energia equivalente al consumo annuale di intere nazioni, come l’Olanda in un contesto europeo.

Questo straordinario potenziale non può che attirare attenzioni sia da parte della comunità scientifica sia da parte di quella industriale. Lo sviluppo di materiali superconduttori a temperatura ambiente rappresenta una sorta di “Santo Graal” per fisici e ingegneri, ma anche un terreno fertile per speculazioni e sensazionalismo. Non sorprende, dunque, che il campo della superconduttività sia spesso teatro di intense competizioni, annunci sensazionali e, inevitabilmente, delusioni. Personalmente, ho perso il conto di quante volte i titoli dei giornali abbiano proclamato scoperte rivoluzionarie, salvo poi assistere, pochi mesi dopo, a smentite clamorose; in questo mi aiuta il «New York Times» (NYT, 2023) che documenta almeno 11 annunci di scoperte epocali nel campo, di cui ben 8 successivamente ritrattati.

Questa dinamica potrebbe suggerire, a prima vista, una crisi del metodo scientifico, sempre più influenzato da interessi economici e mediatici. Le pressioni per ottenere risultati concreti e immediati spingono spesso verso annunci prematuri o, nei casi peggiori, verso pratiche che sfiorano il sensazionalismo. Tuttavia, sarebbe un errore fermarsi a questa lettura pessimistica. La scienza, anche nelle sue manifestazioni più fallibili, mantiene una straordinaria capacità di autocorrezione grazie al metodo scientifico e alla collaborazione internazionale.

Ogni qual volta viene annunciata una scoperta nel campo della superconduttività, si mette in moto un meccanismo globale di verifica e validazione. Nella sua forma più virtuosa, questo processo si basa su preprint e comunicazioni aperte, che permettono alla comunità scientifica di analizzare criticamente i dati, verificare le teorie e tentare di replicare i risultati. Quando, invece, gli annunci arrivano da comunicati stampa o campagne mediatiche, spesso orchestrate per aumentare la visibilità di un istituto o di un gruppo di ricerca, il rischio di fraintendimenti o di esagerazioni aumenta.

Con questo non intendo assolutamente suggerire che tali annunci siano frutto di cattive intenzioni. La ricerca di punta si muove inevitabilmente in territori inesplorati, dove le difficoltà tecniche sono enormi. I superconduttori ad alta temperatura finora scoperti richiedono condizioni sperimentali

estreme, come pressioni elevatissime, per manifestare le loro proprietà. La complessità del processo scientifico – dalla sintesi dei materiali alla loro caratterizzazione, fino all'identificazione delle proprietà superconduttive – lascia ampio margine per errori, anche quando gli scienziati agiscono con la massima cura e diligenza.

Un altro fattore che contribuisce alla fragilità di certe scoperte è la natura interdisciplinare di questo campo. Le competenze necessarie per progettare, sintetizzare e testare nuovi materiali non sempre sono disponibili all'interno dello stesso laboratorio o gruppo di ricerca. Questo aumenta il rischio di interpretazioni errate o incomplete, specialmente in settori così tecnicamente complessi.

Eppure, proprio in questa fragilità risiede una delle più grandi forze del metodo scientifico. La scienza si basa su un processo collettivo, in cui solamente la verifica reciproca – molto spesso a livello internazionale – garantisce che solo i risultati solidi superino la prova del tempo. Gli sforzi globali per confermare o confutare una scoperta non sono solo una forma di controllo, ma anche una dimostrazione del valore della collaborazione e della trasparenza.

La storia della superconduttività ad alta temperatura, quindi, non è solo un monito sui rischi del sensazionalismo, ma anche una celebrazione della capacità della scienza di auto-correggersi e avanzare. Anche di fronte a errori, pressioni economiche o annunci prematuri, la comunità scientifica globale continua a dimostrare la sua resilienza, confermando che il progresso è possibile solo attraverso l'onestà intellettuale, la collaborazione e l'impegno condiviso per la conoscenza.

Bibliografia

- Bardeen J., Cooper L.N. e Schrieffer J.R., 1957, *Microscopic Theory of Superconductivity*, «Physical Review», 106, p. 162.
- Cooper L.N., 1956, *Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas*, «Physical Review», 104, p. 1189.
- De Gennes P.G., 2018, *Superconductivity of Metals and Alloys*, CRC Press.
- Garberoglio G., 2016, *Quantum Mechanics and Reality: from wavefunctions to entanglement*. «Atti dell'Accademia roveretana degli Agiati», a. 266, p. 5.
- Garberoglio G., 2021, *Meccanica quantistica di oggetti macroscopici. I. Superfluidità*, «Atti dell'Accademia roveretana degli Agiati», a. 271, p. 103.
- Ginzburg V.L., Landau L.D., 1950, Zh. Eksp. Teor. Fiz, 20, p. 1064.
- Khalatnikov I.M., 2000, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*, CRC Press.
- Leggett A.J., 2006, *Quantum liquids: Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems*, Oxford University Press.
- London F., London H., 1935, *The Electromagnetic Equations of the Supraconductor*, «Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences», 149, p. 71.
- Maeno Y., Ikeda A., Mattoni G., 2024, *Thirty years of puzzling superconductivity in Sr_2RuO_4* , «Nature Physics», 20, p. 1712.
- Mazziotti D.A., 1989, *Quantum chemistry without wave functions: Two-electron reduced density matrices*, «Accounts of Chemical Research», 39, p. 207.
- NYT, 2023, *11 Scientists Found a Room-Temperature Superconductor. Now 8 of Them Want a Retraction*, «The New York Times», 29/03/2023, <https://www.nytimes.com/2023/09/29/science/superconductor-retraction-ranga-dias-rochester.html>
- Pines, D., Nozières, P., 1989, *Theory of Quantum Liquids. Normal Fermi Liquids*, CRC Press.
- Tinkham M., 2004, *Introduction to Superconductivity (second edition)*. Dover Publications.
- Yang C.-N., 1962, *Concepts of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors*, «Review of Modern Physics», 34, p. 694.

GENNAIO 2025

Stampa a cura di
Scripta sc - Rovereto (TN)
idea@scriptasc.it
www.scriptasc.it



ISSN 1124-0350

2024
ser. X
vol. VI, B

Atti della Accademia Roveretana degli Agiati