Francesco Prandel

I NUMERI CHE CONTANO

Abstract - Prandel F., 2018 - The numbers that count.

Atti Acc. Rov. Agiati, a. 268, 2018, ser. IX, vol. VIII, B: 53-59.

Natural numbers are so-called because they are the numbers we use to count. From the perspective we propose, however, one might suspect that the counting relies instead on complex numbers, particularly on their subset represented by the roots of unity. In this view, complex numbers would seem more "natural" than the same natural numbers. The discussion, which has a bucolic setting, is entrusted to two characters, one real and the other imaginary, and after a brief circular delay, it proposes a hyperbolic drift.

Key words - Natural numbers; Complex numbers.

Riassunto - Prandel F., 2018 - I numeri che contano.

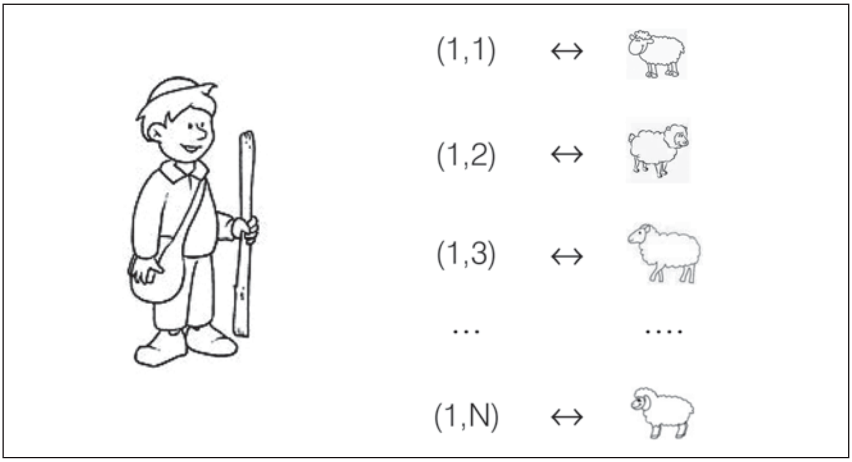
I numeri *naturali* vengono così detti perché sarebbero i numeri che usiamo per contare. Dalla prospettiva che proponiamo, tuttavia, si potrebbe sospettare che il conteggio si avvalga invece dei *numeri complessi*, in particolare di quel loro sottoinsieme noto come *radici dell'unità*. In quest'ottica i numeri complessi sembrerebbero più "naturali" degli stessi numeri naturali. La discussione, che ha ambientazione bucolica, viene affidata a due personaggi, uno reale e l'altro immaginario, e dopo un breve indugio circolare si concede una deriva iperbolica.

Parole chiave - Numeri naturali; Numeri complessi.

Che numeri usiamo per contare? La risposta può sembrare scontata: usiamo i numeri *naturali*. Ma è davvero così? Immaginiamo un pastore che conta le pecore al pascolo: compie nell'ordine *due* operazioni.

1) Assegna *valore unitario costante* a ciascuna pecora (il fatto che questa operazione il pastore la esegua *inconsapevolmente*, non toglie che la esegua *effettivamente*).
2) Assegna *valori naturali crescenti* a tutte le pecore (l'ultimo di tali valori – cioè il valore naturale associato all'ultima pecora – corrisponde al numero di pecore che compongono il gregge).

In sintesi, il pastore assegna a ciascuna pecora una *coppia ordinata* di valori naturali, dei quali il primo è sempre unitario.



Ora, un turista che assista alla scena potrebbe rimanere alquanto ammirato da un pastore a tal punto scrupoloso. A giustificazione di tale ammirazione, il turista potrebbe fargli notare che la prima operazione del conteggio – quella che assegna valore unitario ad ogni pecora – è in qualche modo *implicita* nell'atto stesso del contare, ma non per questo è superfluo tenerne conto. Il pastore, dal canto suo, potrebbe far presente che questa operazione preliminare – che egli riconosce di eseguire inconsapevolmente – è tutt'altro che scontata: ad ogni componente del gregge egli assegna valore unitario, sia esso una pecora bianca, una pecora nera, un montone o un agnello.

A questo punto, potrebbe darsi il caso che il nostro turista sia un matematico, e che non perda l'occasione per dare sfoggio della sua erudizione. In tal caso farebbe notare al pastore che, per i matematici, i numeri complessi sono per certi versi più "naturali" dei numeri naturali. Forse citerebbe un bel passaggio tratto da "L'irragionevole efficacia della matematica nelle scienze naturali", del fisico Eugene P. Wigner.

> I numeri complessi sono un esempio particolarmente calzante di quanto detto. È ovvio che nella nostra esperienza quotidiana nulla suggerisce l'introduzione di queste quantità. Eppure, se si chiede a un matematico di giustificare il suo interesse per i numeri complessi, egli menzionerà, un po' indignato, i molti e bei teoremi nella teoria delle equazioni, delle serie di potenze e delle funzioni analitiche in generale, i quali devono tutti la loro origine all'introduzione dei numeri complessi. Il matematico non è disposto a rinunciare alle meravigliose conquiste del suo genio.

Spronato dalla curiosità del pastore, il turista matematico potrebbe anche spingersi oltre: probabilmente estrarrebbe dal cilindro le radici N-esime dell'unità. Un sottoinsieme dei numeri complessi che, dal punto di vista geometrico, rappresenta l'insieme dei vertici dell'N-gono regolare inscritto nella circonferenza unitaria centrata nell'origine del piano complesso.

1) $z_n = \exp\left(i2\pi\frac{n}{N}\right) \qquad z_n z_n^* = |z_n|^2 = 1 \qquad n, N \in \mathbb{N}$

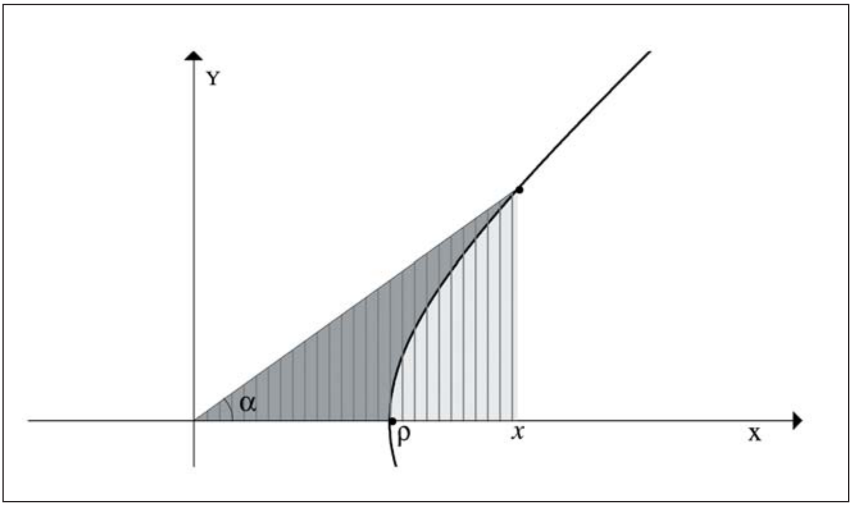
Il modulo del numero complesso z_n rimane unitario, varia la sua fase naturale *n* ([1]). Il pastore, allora, un po' perplesso obietterebbe che non si è mai visto un gregge che pascoli mantenendo la formazione di un poligono regolare. Il compagno, per rassicurarlo, gli farebbe notare che con l'espressione 1 non intendeva dire questo, ma semplicemente che quando contiamo degli oggetti prescindiamo dalle loro particolarità, cioè li consideriamo (*quasi*) *identici*. In effetti, seguendo G. W. von Leibniz, questi oggetti non possono essere del tutto identici: devono essere in qualche modo discernibili. Diversamente, anziché una pluralità di oggetti dovremmo parlare di un singolo oggetto (identità degli indiscernibili). Pertanto, oggetti peraltro identici debbono differire almeno nella posizione. I punti che l'espressione 1 individua nel piano complesso hanno sì posizioni differenti, ma la loro configurazione presenta una simmetria rotazionale di ordine N. In altri termini, gli "oggetti" individuati dall'espressione 1, pur rimanendo *distinti*, sono quanto di più simile si possa immaginare a un "insieme di oggetti identici", cioè all'idea che abbiamo in testa quando contiamo degli oggetti astraendo dalle loro peculiarità.

A questo punto, il pastore potrebbe persino arrivare a nutrire il seguente sospetto: non è affatto «ovvio che nella nostra esperienza quotidiana nulla suggerisce l'introduzione di queste quantità», cioè dei numeri complessi. In effetti finirebbe forse per convincersi che persino i pastori usano i numeri complessi: per contare le pecore assegnano a ciascuna *modulo unitario* e *fase naturale*.

Approfittando del suo inusuale interlocutore, il pastore potrebbe sottoporgli un problema che lo assilla da qualche giorno: ha una coppia di conigli, e vuole sapere quanti saranno tra un anno se li lascia liberi di riprodursi. Il turista, che avrebbe sperato in un problema più originale, farebbe presente che il problema è stato risolto da Leonardo Pisano, in arte Fibonacci, quasi un millennio fa: le coppie di conigli aumentano mensilmente secondo la successione che porta il nome del suo scopritore, i cui

---

([1]) La fase graduale *n* assume valori naturali (esprime il numero di *gradi* – ciascuno di ampiezza radiante $2\pi/N$ – che Il fattore $2\pi/N$ converte in radianti).



primi termini sono 1, 1, 2, 3, 5, 8 ... Dopo un attimo di raccoglimento, il pastore potrebbe esclamare «144». Il turista, stupito dalla rapidità nel reperire l'algoritmo ricorsivo

2) $F_1=1 \quad F_2=1 \quad F_{n+2}=F_{n+1}+F_n \qquad n\geq 1$

e dalla velocità di calcolo del pastore, gli proporrebbe senz'altro una soluzione più impegnativa, concedendosi un altro sconfinamento nei numeri complessi. Non quelli circolari, buoni per le pecore al pascolo, ma quelli iperbolici, senz'altro più adatti ai conigli intenti a riprodursi. Se per contare le pecore al pascolo è sufficiente passare in rassegna i vertici del poligono circolare regolare unitario, per contare i conigli ogni mese basta saltare da un vertice all'altro di un particolare poligono iperbolico regolare. Nel seguente grafico due vertici di un poligono iperbolico delimitano un arco di iperbole di raggio ρ. L'area A del settore iperbolico di ampiezza α – in grigio scuro – si ottiene sottraendo a quella del triangolo – in righettato – l'area sottesa dall'arco di iperbole – in grigio chiaro.

3) $$A=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-\rho^2}-\int_\rho^x\sqrt{x^2-\rho^2}\,dx=\frac{\rho^2}{2}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2-\rho^2}\right)-\ln\rho\right]=\frac{\rho^2}{2}\ln\left[\frac{x}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{x}{\rho}\right)^2-1}\right]$$

Come l'angolo circolare, anche quello iperbolico è il doppio dell'area del settore divisa per il quadrato del raggio, per cui dalla 3 si ricava la seguente.

4) $$\alpha=\ln\left[\frac{x}{\rho}+\sqrt{\left(\frac{x}{\rho}\right)^2-1}\right]$$

Un poligono iperbolico è regolare se, sull'iperbole che lo circoscrive, i suoi vertici staccano archi di identica lunghezza, cioè se i corrispondenti angoli interni α sono identici. Introduciamo ora i numeri complessi iperbolici. Indicata con ∍ l'unità immaginaria iperbolica definita come segue

5) $$\ni^n = \begin{cases} 1 & \text{se n è pari} \\ \ni & \text{se n è dispari} \end{cases} \qquad \ni = \frac{\ni^2}{\ni} = \frac{1}{\ni}$$

un numero complesso iperbolico z ha la seguente forma, dove x e y sono numeri reali.

6) $$z = x + \ni y \qquad z^* = x - \ni y \qquad |z|^2 = zz^* = x^2 - y^2$$

A differenza dei numeri complessi circolari, che formano un *campo* (il loro inverso moltiplicativo è definito nel piano complesso circolare fuorché nell'origine), i numeri complessi iperbolici formano un *anello* (il loro inverso moltiplicativo è definito nel piano complesso iperbolico fuorché sulle bisettrici dei suoi assi).

7) $$z^{-1} = (x + \ni y)^{-1} = \frac{x - \ni y}{x^2 - y^2} = \frac{z^*}{|z|^2}$$

Come i numeri complessi circolari, anche i numeri complessi iperbolici sono esprimibili in forma trigonometrica (per cui valgono le corrispondenti relazioni di trigonometria iperbolica), e vale per essi una formula analoga a quella di Eulero per i numeri complessi circolari,

8) $$z = x + \ni y = \rho(\cosh\alpha + \ni \sinh\alpha) = \rho \exp(\ni \alpha)$$

dove le funzioni iperboliche sono definite come segue.

9) $$\cosh\alpha = \frac{\exp(\ni\alpha) + \exp(-\ni\alpha)}{2} \qquad \ni \sinh\alpha = \frac{\exp(\ni\alpha) - \exp(-\ni\alpha)}{2}$$

I vertici del poligono iperbolico regolare di raggio ρ e angolo interno α sono pertanto individuati dalla seguente espressione, invertendo la quale si ottiene la versione complessa iperbolica dell'espressione 4 di α

10) $$z_n = \rho \exp(\ni \alpha n) \qquad \ni \alpha = \ln\left[\frac{x}{\rho} + \ni \sqrt{\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 - 1}\right] \qquad n \in \mathbf{N}$$

Irritato da tanta verbosità e temendo che il turista, troppo preso dalle sue iperboliche divagazioni, abbia perso di vista il problema dei conigli, il pastore potrebbe interromperlo e chiedergli dove intenda arrivare. Il compagno, allora, gli chiederebbe ancora un attimo di pazienza. Tra i poligoni iperbolici ottenibili variando i parametri ρ e α, uno in particolare ha delle caratteristiche piuttosto interessanti. Inserendo nella 4 i valori $\rho=2/\sqrt{5}$ e $x=1$, si ottiene

11) $\alpha = \ln \phi$

dove φ è il numero di Fidia, meglio noto come "sezione aurea", che ha il seguente valore e gode di alcune proprietà notevoli.

12) $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \phi = 1 + \dfrac{1}{\phi} = \phi^2 - 1$

Per mantenere vivo l'interesse del pastore, il turista potrebbe fargli notare che il rapporto tra il numero di coppie di conigli al mese n-esimo e quelle del mese precedente tende al numero di Fidia all'aumentare del numero n di mesi.

13) $\phi = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}}$

Interpretato come numero complesso iperbolico, anziché come numero reale, φ assume la seguente espressione, per cui risulta unimodulare e gode delle seguenti proprietà notevoli.

14) $\phi = \dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\backepsilon}{2} \qquad \phi^* = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{\backepsilon}{2} \qquad \phi\phi^* = 1 \qquad \phi = \dfrac{1}{\phi^*} = \backepsilon + \dfrac{1}{\phi} = \backepsilon + \phi^* = \backepsilon\left(\phi^2 - 1\right)$

Inserendo i suddetti valori $\rho=2/\sqrt{5}$ e $x=1$ nella seconda delle 10, anziché nella 4, in luogo della 11 si ottiene la seguente, dove φ vale nella sua versione complessa iperbolica 14.

15) $\backepsilon\,\alpha = \ln \phi$

Tenendo conto delle 9, della prima delle 10 e della 15, nel piano complesso iperbolico l'n-esimo vertice del poligono iperbolico in questione è individuato dalle seguenti coordinate cartesiane.

16)
$$x_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\cosh\left(\frac{n\ln\phi}{\backepsilon}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\exp(n\ln\phi)+\exp(-n\ln\phi)}{2} = \frac{\phi^n + \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$
$$\backepsilon\, y_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\sinh\left(\frac{n\ln\phi}{\backepsilon}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}\,\frac{\exp(n\ln\phi)-\exp(-n\ln\phi)}{2} = \frac{\phi^n - \phi^{-n}}{\sqrt{5}}$$

Il turista farebbe notare al pastore che le coordinate dei vertici differiscono solo per il segno che compare negli ultimi membri delle espressioni 16. Introducendo in suo luogo l'alternatore di segno nella forma $[-(-1)^{-n}]$, in modo da alternare l'ascissa e l'ordinata dei vertici del poligono iperbolico, otterrebbe la seguente espressione nota come Formula di Binet, che fa corrispondere ad ogni *n* positivo l'*n*-esimo termine della successione di Fibonacci (2).

17) $$F(n)=\frac{\phi^{n}+[-(-1)^{-n}]\phi^{-n}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{n}-(-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}=\frac{\phi^{n}}{\sqrt{5}}-\frac{(1-\phi)^{n}}{\sqrt{5}}$$

A questo punto, il pastore ringrazierebbe senz'altro aggiungere il turista per avergli insegnato a contare più velocemente i conigli, e il turista gli sarebbe grato per aver imparato a contare più lentamente le pecore (3). A conclusione del sodalizio, il nostro turista, cedendo all'irresistibile tentazione di andare oltre che anima i matematici, non mancherebbe di far notare che i numeri complessi iperbolici sono i numeri dello spazio-tempo, e citerebbe probabilmente un passo de "La conoscenza del mondo fisico" del fisico Max Plank (4).

> Per far comprendere con una parola il contenuto positivo della teoria della relatività speciale, lo si può definire la fusione dello spazio e del tempo in un concetto unitario. Non nel senso che lo spazio ed il tempo siano cose analoghe, ma nella stessa maniera con cui un numero reale ed un numero immaginario vengono collegati nell'unico concetto di numero complesso.

(2) La 17, per via dell' alternatore di segno, assume alternativamente le forme delle 16 senza tener conto che sono, rispettivamente, la parte reale e la parte immaginaria di un numero complesso (iperbolico). Per questo, nella 17, il numero di Fidia vale nella sua forma reale 12 (mentre nelle 16 vale nella sua forma complessa iperbolica 14).

(3) Per completezza, il turista potrebbe chiedere al pastore se, a suo modo di vedere, le operazioni del conteggio descritte in apertura siano meglio descritte dalla 1 o dalla prima delle 10, cioè se il conteggio si avvale dei numeri complessi circolari o dei numeri complessi iperbolici.

(4) In alcune trattazioni della relatività ristretta, gli intervalli spaziali vengono espressi tramite la funzione iperbolica sinusoidale, e quelli temporali tramite la funzione iperbolica cosinusoidale.

Francesco Prandel, franz.prandel@gmail.com.