

LUCA SALASNICH

LE ORIGINI DELLA FISICA MODERNA E CONTEMPORANEA

ABSTRACT - SALASNICH L., 2018 - The origins of modern and contemporary physics.
Atti Acc. Rov. Agiati, a. 268, 2018, ser. IX, vol. VIII, B: 37-52.

In this paper we examine the origins of modern physics, namely the relativity of Einstein and the quantum mechanics due to Planck, Bohr, Schrödinger and others. We will also give a short description of the relevant axioms of quantum mechanics, introduced by Dirac and Von Neumann. Finally we will discuss some elementary notions of quantum computing, which are at the basis of the contemporary quantum physics.

KEY WORDS - Relativity; Quantum Physics.

RIASSUNTO - SALASNICH L., 2018 - Le origini della fisica moderna e contemporanea.

In questo contributo esaminiamo le origini della fisica moderna, vale a dire la relatività di Einstein e la meccanica quantistica dovuta a Planck, Bohr, Schrödinger, e altri. Daremo anche una breve descrizione degli assiomi rilevanti della meccanica quantistica, introdotti da Dirac e Von Neumann. Infine discuteremo alcune nozioni elementari di informatica quantistica, che sono alla base della fisica quantistica contemporanea.

PAROLE CHIAVE - Relatività; Fisica quantistica.

1. LA MECCANICA RELATIVISTICA

Nel 1887 Albert Michelson e Edward Morley ⁽¹⁾ eseguirono un fondamentale esperimento di interferometria ottica.

In questo esperimento essi mostrarono per la prima volta che la velocità della luce nel vuoto è

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s,}$$

⁽¹⁾ A.A. MICHELSON A.A., & Morley E.W., *American Journal of Science*, 34, p. 333 (1887); ID, *American Journal of Science*, 34, p. 427 (1887).

indipendentemente dal moto relativo dello strumento che misura la velocità della luce. Alcuni anni dopo, Henry Poincaré suggerì che la velocità della luce è il valore massimo possibile per qualsiasi tipo di velocità ⁽²⁾.

1.1 Le trasformazioni di Lorentz e i postulati di Einstein

Sulla base delle idee precedenti di George Francis FitzGerald ⁽³⁾, nel 1904 Hendrik Lorentz ⁽⁴⁾ dimostrò che le equazioni di Maxwell dell'elettromagnetismo sono invarianti rispetto a questo tipo di trasformazioni spazio-temporali

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\y' &= y \\z' &= z \\t' &= \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\end{aligned}$$

che sono ora chiamate trasformazioni di Lorentz (o Lorentz-FitzGerald). Questa attività di ricerca sulle trasformazioni invarianti è stata riassunta nel 1905 da Albert Einstein ⁽⁵⁾, che propose di adottare due suggestivi postulati:

- i) le leggi della fisica sono le stesse per tutti i sistemi di riferimento inerziali;
- ii) la velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi di riferimento inerziali.

Da questi due postulati Einstein dedusse che le leggi della fisica sono invarianti rispetto alle trasformazioni di Lorentz ma le leggi della meccanica newtoniana (che non lo sono) devono essere modificate. In questo modo Einstein sviluppò una nuova meccanica, la meccanica relativistica, che si riconduce alla meccanica newtoniana quando è coinvolta una velocità v molto più piccola della velocità della luce c .

⁽²⁾ POINCARÉ H., *Revue de Metaphysique et de Morale*, 6, p. 1 (1898).

⁽³⁾ FITZGERALD G.F., *Science*, 13, p. 390 (1889).

⁽⁴⁾ LORENTZ H.A., *Proc. Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences*, 6, p. 809 (1904).

⁽⁵⁾ EINSTEIN A., *Annalen der Physik*, 17, p. 891 (1905).

1.2 Contrazione delle lunghezze e dilatazione dei tempi

Uno dei risultati sorprendenti della cinematica relativistica è la contrazione delle lunghezze: la lunghezza L di un'asta misurata da un osservatore (strumento di misura) che si muove alla velocità v rispetto all'asta è data da

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

dove L_0 è la lunghezza propria dell'asta, cioè la lunghezza misurata da un osservatore solidale con l'asta.

Un altro risultato sorprendente è la dilatazione del tempo: l'intervallo di tempo T di un orologio misurato da un osservatore che si muove alla velocità v rispetto all'orologio è dato da

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

dove T_0 è il tempo proprio dell'orologio, cioè il tempo misurato da un osservatore solidale con l'orologio.

1.3 La dinamica relativistica di Einstein

Secondo la meccanica relativistica di Einstein, l'energia E di una particella di massa a riposo m e quantità di moto $p = |\mathbf{p}|$ è data da

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}.$$

Se la particella ha quantità di moto nulla, cioè $p = 0$, allora

$$E = mc^2,$$

che è l'energia di riposo della particella. Invece, se il momentum lineare p è finito ma è verificata la condizione $pc/(mc^2) \ll 1$ si può espandere la radice quadrata come segue

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \dots$$

Ciò mostra che l'energia E è approssimata dal somma di due contributi: l'energia a riposo mc^2 e la familiare, non relativistica, energia cinetica $p^2/(2m)$. Nel caso di una particella con massa a riposo pari a zero, ovvero $m = 0$, l'energia è data da

$$E = pc,$$

che è effettivamente l'energia dei fotoni di luce. Sottolineiamo che tutte le previsioni della meccanica relativistica (relatività speciale o ristretta) sono state confermate dagli esperimenti. Anche molte previsioni della relatività generale, che generalizza la meccanica relativistica tenendo conto della teoria della gravitazione, sono state verificate sperimentalmente, ed utilizzate in molte applicazioni. Ad esempio, i dispositivi GPS (Global Positioning System) includono correzioni dovute proprio alla relatività generale.

2. LA MECCANICA QUANTISTICA

2.1 La radiazione del corpo nero di Planck

Storicamente l'inizio della meccanica quantistica è posto nel 1900 quando Max Planck ⁽⁶⁾ trovò che l'unico modo di spiegare i risultati sperimentali dello spettro elettromagnetico emesso da corpi solidi caldi consistesse nel supporre che l'energia E della radiazione con la frequenza ν emessa dalle pareti del corpo fosse quantizzata

$$E = h\nu n ,$$

dove $n = 0, 1, 2, \dots$ è un numero quantico intero. Con l'aiuto della meccanica statistica, Planck derivò l'espressione

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi^2}{c^3} \nu^2 \frac{h\nu}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

per la densità di energia elettromagnetica per unità di frequenza $\rho(\nu)$ emessa dal corpo caldo alla temperatura T , con $k^B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J / K}$ la costante di Boltzmann, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m / s}$ la velocità della luce nel vuoto. Questa formula, nota come legge di Planck della radiazione del corpo nero, è in ottimo accordo con i dati sperimentali. Si noti che un corpo solido caldo può essere effettivamente approssimato dal cosiddetto corpo nero, cioè un corpo fisico idealizzato che assorbe tutta la radiazione elettromagnetica incidente ed è anche il miglior emettitore possibile di radiazioni termiche. La costante h derivata da Planck dall'interpolazione di dati sperimentali risulta essere

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J s} .$$

⁽⁶⁾ PLANCK M., *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, p. 202 (1900); ID., *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 2, p. 237 (1900).

Questo parametro è chiamato costante di Planck. Si noti che spesso si usa anche la costante di Planck ridotta

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1.06 \cdot 10^{-34} \text{ J s} .$$

2.2 L'effetto fotoelettrico

Pochi anni dopo la formulazione del corpo nero di Planck, nel 1905, Albert Einstein ⁽⁷⁾ suggerì non solo che la radiazione elettromagnetica venisse emessa da corpi caldi in una forma quantizzata, come trovato da Planck, ma che in effetti la radiazione elettromagnetica è sempre composta da quanti di luce, chiamati fotoni, dove l'energia E del singolo fotone è data da

$$E = h\nu .$$

Einstein ha usato il concetto di fotone per spiegare l'effetto fotoelettrico e predetto che l'energia cinetica di un elettrone emesso dalla superficie di un metallo dopo essere stata irradiata è data da

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W ,$$

dove W è la funzione di lavoro del metallo (cioè l'energia minima per estrarre l'elettrone dalla superficie del metallo), m è la massa dell'elettrone e v la velocità di emissione di l'elettrone. Questa previsione implica chiaramente che la minima frequenza di radiazione per estrarre gli elettroni da un metallo sia $\nu_{\min} = W/h$. Successivi esperimenti hanno confermato la formula di Einstein e fornito un'ulteriore misura della costante di Planck h .

2.3 L'atomo di idrogeno secondo Bohr

Nel 1913 Niels Bohr ⁽⁸⁾ fu in grado di spiegare le frequenze discrete di emissione elettromagnetica dell'atomo di idrogeno nell'ipotesi che l'energia dell'elettrone orbitante attorno al nucleo sia quantizzata secondo la formula

$$E_n = -\frac{me^4}{2\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \frac{1}{n^2} ,$$

dove $n = 1, 2, 3, \dots$ è il numero quantico principale, e è la carica elettrica dell'elettrone e ε_0 la costante dielettrica del vuoto. Questa espressione

⁽⁷⁾ EINSTEIN A., *Annalen der Physik*, 17, p. 132 (1905).

⁽⁸⁾ BOHR N., *Philosophical Magazine*, 26, p. 1 (1913).

mostra che gli stati quantistici del il sistema sono caratterizzati dal numero quantico n e lo stato fondamentale ($n = 1$) ha un'energia pari a 13.6 eV, che è l'energia di ionizzazione dell'idrogeno. Secondo la teoria di Bohr, la radiazione elettromagnetica viene emessa o assorbita quando un elettrone ha una transizione da un livello di energia E_n a un altro E_m . Inoltre, la frequenza ν di la radiazione è correlata alle energie dei due stati coinvolti nella transizione da

$$h\nu = E_n - E_m .$$

Quindi qualsiasi transizione elettromagnetica tra due stati quantici implica l'emissione o l'assorbimento di un fotone con un'energia $h\nu$ uguale alla differenza di energia degli stati coinvolti.

2.4 L'effetto Compton

Nel 1922 Arthur Compton ⁽⁹⁾ notò che la diffusione dei raggi X con gli elettroni (effetto Compton) è un processo di dispersione tra i fotoni dei raggi X e gli elettroni. L'energia del fotone dei raggi X ha un'espressione familiare:

$$E = h\nu = h\frac{c}{\lambda} ,$$

con λ la lunghezza d'onda del fotone, essendo la velocità della luce data da $c = \lambda\nu$. Usando la connessione relativistica tra energia E e quantità di moto $p = |\mathbf{p}|$ per una particella con massa a riposo pari a zero, si deduce che la quantità di moto del fotone si può scrivere come

$$p = \frac{h}{\lambda} .$$

Applicando la conservazione di energia e quantità di moto al processo di diffusione, Compton ottenne la seguente espressione

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos(\theta))$$

per la lunghezza d'onda λ' del fotone diffuso, con θ l'angolo tra il fotone in arrivo e quello in uscita. Questa formula è pienamente d'accordo con i risultati sperimentali.

⁽⁹⁾ COMPTON A.H., *Physical Review*, 21, p. 483 (1923).

2.5 Le onde quantistiche di de Broglie e Schrödinger

Ispirato al comportamento delle particelle d'onda esposto dalla luce ⁽¹⁰⁾, nel 1924 Louis de Broglie ⁽¹¹⁾ suggerì che anche la materia, ed in particolare l'elettrone, avesse proprietà ondulatorie. Egli postulò che la relazione

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

si applicasse non solo ai fotoni ma anche alle particelle di materia. In generale, p è la quantità di moto (proprietà della particella) e λ la lunghezza d'onda (proprietà dell'onda) della "particella quantistica".

Due anni dopo la proposta di de Broglie, nel 1926, Erwin Schrödinger ⁽¹²⁾ portò agli estremi la dualità onda-particella e introdusse la seguente equazione d'onda per un elettrone sotto l'azione di un potenziale esterno $U(\mathbf{r})$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}, t),$$

dove $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ è l'operatore di Laplace, detto laplaciano. Questa equazione è ora nota come Equazione di Schrödinger. Nel caso dell'atomo di idrogeno, dove

$$U(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

è l'energia potenziale di Coulomb tra il protone e l'elettrone, Schrödinger mostrò che ponendo

$$\psi(\mathbf{r}, t) = R_n(r) e^{-iE_n t/\hbar}$$

si trova l'equazione di Schrödinger stazionaria per l'autofunzione radiale $R_n(r)$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] R_n(r) = E_n R_n(r),$$

con autovalore E_n dato esattamente dalla formula di Bohr ⁽¹³⁾. Subito dopo, si capì che l'equazione di Schrödinger stazionaria dell'atomo di idrogeno soddisfa un problema agli autovalori più generale, vale a dire

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right] \psi_{nlm_l}(\mathbf{r}) = E_n \psi_{nlm_l}(\mathbf{r}),$$

⁽¹⁰⁾ DE BROGLIE L., *Journal de Physique Radium*, 3, p. 422 (1922).

⁽¹¹⁾ DE BROGLIE L., *Philosophical Magazine*, 47, p. 446 (1924).

⁽¹²⁾ SCHRÖDINGER E., *Annales de Physique*, 79, p. 361 (1926).

⁽¹³⁾ BOHR N., *Philosophical Magazine*, 26, p. 1 (1913).

dove $\psi_{nlm_l}(\mathbf{r})$ è una generica soluzione del problema, dipendente da tre numeri quantici: il numero quantico principale $n = 1, 2, 3, \dots$, il numero quantico angolare $l = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, e il numero quantico angolare della terza componente $m_l = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$. La generica autofunzione dell'elettrone nell'atomo di idrogeno in coordinate sferiche è data

$$\psi_{nlm_l}(r, \theta, \phi) = R_{nl}(r) Y_{lm_l}(\theta, \phi),$$

dove $R_{nl}(r)$ è la funzione d'onda radiale mentre $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$ è la funzione d'onda angolare.

È importante sottolineare che inizialmente Schrödinger pensava che la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ fosse un'onda di materia, tale che $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ fornisca la densità locale di elettroni nella posizione \mathbf{r} alla volta t . Fu Max Born ⁽¹⁴⁾ a suggerire una interpretazione probabilistica della funzione d'onda: la $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ va intesa come campo di probabilità, dove $|\psi(\mathbf{r}, t)|^2$ fornisce la densità di probabilità locale di trovare un elettrone nella posizione \mathbf{r} al tempo t , con la condizione di normalizzazione

$$\int d^3\mathbf{r} |\psi(\mathbf{r}, t)|^2 = 1.$$

Nel caso di N particelle l'interpretazione probabilistica di Born diventa cruciale: $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)$ è la funzione d'onda a molti corpi del sistema, tale che $|\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t)|^2$ sia la probabilità di trovare, al tempo t , una particella nella posizione \mathbf{r}_1 , un'altra particella nella posizione \mathbf{r}_2 , e così via.

Nel 1927 il comportamento ondulatorio degli elettroni fu infine dimostrato da Clinton Davisson e Lester Germer ⁽¹⁵⁾, che osservarono la diffrazione di un fascio di elettroni attraverso un cristallo solido. Il fascio diffratto mostra i massimi di intensità quando viene soddisfatta la seguente relazione

$$2d \sin(\phi) = n\lambda,$$

dove n è un numero intero, λ è la lunghezza d'onda di de Broglie per gli elettroni, d è la distanza di separazione dei piani di cristallo e ϕ è l'angolo tra il fascio incidente di elettroni e la superficie del cristallo. La condizione per un massimo diffratto corrisponde a quella di interferenza costruttiva per le onde, che è ben nota in ottica come condizione di Bragg.

⁽¹⁴⁾ BORN M., *Zeitschrift für Physik*, 38, p. 803 (1926).

⁽¹⁵⁾ DAVISSON C.J. & GERMER L.H., *Nature*, 119, p. 558 (1927).

2.6 La meccanica delle matrici di Born, Jordan e Heisenberg

Nello stesso anno (1926) della formulazione dell'equazione di Schrödinger Max Born, Pasqual Jordan e Werner Heisenberg ⁽¹⁶⁾ presentarono una teoria alternativa, nota come meccanica delle matrici. Secondo questa teoria la posizione \mathbf{r} e il momento lineare \mathbf{p} di una particella elementare non sono vettori composti da numeri ma bensì matrici (operatori), le quali obbediscono a strane regole di commutazione

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}), \quad \hat{\mathbf{p}} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z),$$

tali che

$$[\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}}] = i\hbar,$$

dove viene introdotto il simbolo del cappuccio per indicare gli operatori e $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ è il commutatore di operatori generici \hat{A} e \hat{B} . Usando la loro teoria, Born, Jordan e Heisenberg furono in grado di ottenere lo spettro energetico dell'atomo di idrogeno e anche di calcolare le probabilità di transizione tra due livelli di energia. Subito dopo, Schrödinger stesso ⁽¹⁷⁾ si rese conto che la meccanica delle matrici è equivalente alla sua formulazione ondulatoria: introducendo le regole di quantizzazione

$$\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}, \quad \hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla,$$

per ogni funzione $f(\mathbf{r})$ si trova immediatamente la regola di commutazione

$$(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})f(\mathbf{r}) = (-i\hbar\mathbf{r} \cdot \nabla + i\hbar\nabla \cdot \mathbf{r})f(\mathbf{r}) = i\hbar f(\mathbf{r}).$$

Inoltre, partendo dall'hamiltoniana classica

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}),$$

le regole di quantizzazione danno immediatamente l'operatore hamiltoniano quantistico

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U(\mathbf{r})$$

tramite il quale si può scrivere l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r}, t) = \hat{H}\psi(\mathbf{r}, t).$$

⁽¹⁶⁾ BORN M., HEISENBERG W. & JORDAN P., *Zeitschrift für Physik*, 35, p. 557 (1926).

⁽¹⁷⁾ SCHRÖDINGER E., *Annales de Physique*, 79, p. 734 (1926).

3. GLI ASSIOMI DELLA MECCANICA QUANTISTICA DI DIRAC E VON NEUMANN

La formulazione assiomatica della meccanica quantistica è dovuta principalmente a Paul Maurice Dirac ⁽¹⁸⁾ e John von Neumann ⁽¹⁹⁾. Gli assiomi di base della meccanica quantistica sono i seguenti:

Assioma 1. Lo stato di un sistema quantistico è descritto da un vettore unitario $|\psi\rangle$ appartenente ad uno spazio di Hilbert complesso separabile.

Assioma 2. Qualsiasi osservabile di un sistema quantistico è descritto da un operatore lineare autoaggiunto \hat{F} che agisce sullo spazio di Hilbert dei vettori di stato.

Assioma 3. I possibili valori misurabili dell'osservabile \hat{F} sono i suoi autovalori f , tali che

$$\hat{F}|f\rangle = f|f\rangle$$

con $|f\rangle$ il corrispondente stato. Si noti che l'osservabile \hat{F} ammette la decomposizione spettrale

$$\hat{F} = \sum_f |f\rangle f \langle f|,$$

che è piuttosto utile nelle applicazioni, così come la decomposizione spettrale dell'identità

$$\hat{I} = \sum_f |f\rangle \langle f|.$$

Assioma 4. La probabilità p di trovare lo stato $|\psi\rangle$ nello stato $|f\rangle$ è data da

$$p = |\langle f|\psi\rangle|^2,$$

dove l'ampiezza di probabilità complessa $\langle f|\psi\rangle$ denota il prodotto scalare dei due vettori. Questa probabilità p è anche la probabilità di misurare il valore f dell'osservabile \hat{F} quando il sistema si trova nello stato quantistico $|\psi\rangle$. Si noti che sia $|\psi\rangle$ che $|f\rangle$ devono essere normalizzati ad uno. Spesso è utile introdurre il valore di aspettazione (detto anche valore medio) di un osservabile \hat{F} rispetto ad uno stato $|\psi\rangle$ come $\langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$. Inoltre, dall'Assioma 4 ne consegue che la funzione d'onda $\psi(\mathbf{r})$ può essere interpretata come

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle\mathbf{r}|\psi\rangle,$$

che è l'ampiezza di probabilità di trovare lo stato $|\psi\rangle$ nello stato posizione $|\mathbf{r}\rangle$.

Assioma 5. L'evoluzione temporale di stati e osservabili di un sistema quantistico con hamiltoniano H è determinato dall'operatore unitario

⁽¹⁸⁾ DIRAC P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 1930.

⁽¹⁹⁾ VON NEUMANN J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1932.

$$\hat{U}(t) = \exp(-i\hat{H}t/\hbar),$$

tale che $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi\rangle$ sia lo stato $|\psi\rangle$ evoluto nel tempo all'istante t e $\hat{F}(t) = \hat{U}^{-1}(t)\hat{F}\hat{U}(t)$ l'osservabile al medesimo tempo t . A partire dal questo assioma trovano immediatamente l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$$

per lo stato $|\psi(t)\rangle$ e l'equazione di Heisenberg

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{F}(t) = [\hat{F}(t), \hat{H}]$$

per l'osservabile $\hat{F}(t)$.

4. L'INFORMATICA QUANTISTICA: DA FEYNMANN AI GIORNI NOSTRI

Nel 1985 Richard Feynmann propose l'idea di un computer basato solo sulla logica quantistica ⁽²⁰⁾. Dieci anni dopo il concetto di qubit fu introdotto da Benjamin Schumacher ⁽²¹⁾. Il qubit, o bit quantistico, è l'analogo quantistico di un bit classico. Il qubit, unità di base dell'informazione quantistica, è il sistema quantistico più semplice: il sistema quantistico a due livelli. Ci sono molti sistemi a due livelli che possono essere usati come sistemi fisici per realizzare un qubit. Tra le molte possibilità, menzioniamo la polarizzazione orizzontale e verticale della luce, lo stato fondamentale ed il primo stato eccitato di atomi, molecole o nuclei, le buca destra e la buca sinistra di una doppia buca di potenziale, lo spin up e lo spin down di una particella.

I due stati base del qubit sono solitamente indicati come $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Possono essere scritti come

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

utilizzando una rappresentazione vettoriale, dove chiaramente

$$\langle 0| = (1, 0), \quad \langle 1| = (0, 1),$$

⁽²⁰⁾ FEYNMAN R.P., *Optics News*, 11, p. 11 (1985); reprinted in *Foundations of Physics* 16, p. 507 (1985).

⁽²¹⁾ SCHUMACHER B., *Physical Review A*, 51, p. 2738 (1995).

ed anche

$$\langle 0|0\rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1,$$

$$\langle 0|1\rangle = (1, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle 1|0\rangle = (0, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\langle 1|1\rangle = (0, 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1,$$

mentre

$$|0\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|0\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|1\rangle\langle 0| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovviamente, invece di $|0\rangle$ e $|1\rangle$ si possono scegliere altri stati di base. Ad esempio:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

ma anche

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Un qubit puro $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione lineare (stato di sovrapposizione) degli stati di base $|0\rangle$ and $|1\rangle$, cioè

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle,$$

dove α e β sono le ampiezze di probabilità, solitamente numeri complessi, tali che

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Una porta quantistica (o porta logica quantistica) è un operatore unitario \hat{U} che agisce su un qubit. Tra le porte quantiche che agiscono su un singolo qubit ci sono: l'identità

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la porta di Hadamard

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

la porta NOT (anche detta porta X di Pauli X)

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_1,$$

la porta Y di Pauli

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_2,$$

e la porta Z di Pauli

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hat{\sigma}_3.$$

È immediato dedurre le proprietà delle porte quantistiche. Ad esempio, si trova facilmente

$$\hat{H}|0\rangle = |+\rangle, \quad \hat{H}|1\rangle = |-\rangle,$$

ma anche

$$\hat{H}|+\rangle = |0\rangle, \quad \hat{H}|-\rangle = |1\rangle.$$

Un N -qubit $|\Phi_N\rangle$, anche detto registro quantistico, è uno stato quantistico caratterizzato da

$$|\Phi_N\rangle = \sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} c_{\alpha_1 \dots \alpha_N} |\alpha_1\rangle \otimes \dots \otimes |\alpha_N\rangle,$$

dove $|\alpha_i\rangle$ è un singolo qubit (con $\alpha_i = 0, 1$), ed inoltre

$$\sum_{\alpha_1 \dots \alpha_N} |c_{\alpha_1 \dots \alpha_N}|^2 = 1.$$

In pratica, l' N -qubit descrive N configurazioni a due stati. Il più generale 2-qubit $|\Phi_2\rangle$ è conseguentemente dato da

$$|\Phi_2\rangle = c_{00}|00\rangle + c_{01}|01\rangle + c_{10}|10\rangle + c_{11}|11\rangle,$$

dove usiamo $|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$, $|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle$, $|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle$ e $|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle$ per semplificare la notazione. Per gli stati di base dei 2-qubit si può introdurre la seguente rappresentazione vettoriale

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, porte quantistiche possono essere introdotte anche per i 2-qubit. Tra le porte quantistiche che agiscono sui 2-qubit ci sono: la porta identità

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e la porta CNOT (anche detta controlled-NOT)

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che l'azione della porta CNOT su uno stato $|\alpha\beta\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle$ è tale che il qubit "obiettivo" $|\beta\rangle$ cambia solo se il qubit di "controllo" $|\alpha\rangle$ è proprio $|1\rangle$.

Il 2-qubit $|\Phi_2\rangle$ è detto separabile se può essere espresso come il prodotto tensore di due generici 1-qubit, cioè $|\psi_A\rangle$ e $|\psi_B\rangle$, i.e.

$$|\Phi_2\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle.$$

Se questo non è possibile, lo stato $|\Phi_2\rangle$ è detto entangled (intrecciato). Il concetto di entanglement quantistico fu introdotto da Schrödinger ⁽²²⁾ per spiegare l'essenza intrinsecamente quantistica dell'esperimento mentale di Einstein, Podolsky e Rosen ⁽²³⁾, noto come paradosso EPR. Esempi di stati separabili sono

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle,$$

ed anche

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle,$$

ma pure

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle.$$

⁽²²⁾ SCHRÖDINGER E., *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31, p. 555 (1935).

⁽²³⁾ EINSTEIN A., PODOLSKY B. & ROSEN N., *Physical Review*, 47, p. 777 (1935).

Esempi di stati entangled sono invece

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle \pm |10\rangle) .$$

ed anche

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle \pm |11\rangle) .$$

Entrambi questi stati entangled sono detti stati di Bell.

Sorprendentemente, una porta CNOT che agisce su uno stato separabile può produrre uno stato entangled e viceversa. Per esempio:

$$\hat{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) ,$$

mentre

$$\hat{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |10\rangle) .$$

Uno degli obiettivi dell'informatica quantistica è la realizzazione del computer quantistico, cioè un dispositivo per il trattamento e l'elaborazione di informazioni che, per eseguire operazioni sui dati, utilizza i fenomeni tipici della meccanica quantistica, come la sovrapposizione degli stati e l'entanglement. Secondo diversi studi teorici, queste macchine dovrebbero avere una potenza di calcolo enormemente superiore a quella dei computer convenzionali. Ad esempio, Peter Shor ⁽²⁴⁾ ha dimostrato che il computer quantistico sarebbe in grado di fattorizzare qualsiasi numero intero a grandi velocità di elaborazione. Inoltre, Lov Grover ⁽²⁵⁾ ha dimostrato che il computer quantistico sarebbe in grado di risolvere un problema di ricerca in un database indifferenziato molto più velocemente di un computer classico. Il computer quantistico sembra essere una realtà ormai prossima: in questi ultimi anni prototipi con alcune decine di qubit sono stati realizzati da D-Wave Systems, IBM, Intel, Google ⁽²⁶⁾.

⁽²⁴⁾ SHOR P., *Proceedings of the 35th Annual Symposium on the Foundations of Computer Science*, pp. 124-134 (IEEE Computer Society Press, 1994).

⁽²⁵⁾ L.K. GROVER, *Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing*, pp. 212-219 (Association for Computing Machinery, 1996).

⁽²⁶⁾ CHEN S., *APS News*, 27(5), p. 2 (2018).

5. CONCLUSIONI

In questo contributo abbiamo analizzato alcuni risultati significativi della fisica moderna, ovvero sia l'insieme delle teorie fisiche sviluppate a partire dal ventesimo secolo, che hanno determinato un salto concettuale rispetto alla fisica classica, elaborata a partire dal XVII secolo fino al XIX secolo. Abbiamo poi mostrato come la formulazione assiomatica della meccanica quantistica sia estremamente utile per la fisica quantistica contemporanea, ed in particolare per lo studio dell'informatica quantistica, la nuova disciplina che utilizza i quanti per memorizzare ed elaborare le informazioni.

L'autore ringrazia Maurizio Dapor per il costante incoraggiamento e Alberto Cappellaro per la sua lettura critica del testo.