Francesco Prandel

PERCHÉ LE EQUAZIONI DELLA FISICA "SONO QUELLE CHE SONO"?

Abstract - Prandel F., 2017 - Why the equations of physics "are those that are"?

Atti Acc. Rov. Agiati, a. 267, 2017, ser. IX, vol. VII, B: 35-53.

With the objective of examining the question, this work aims at defining the minimalist self-contained system, intended as the simplest autonomous entity. The minimalism that presides to this attempt of definition proposes to reduce to a minimum the a priori assumptions and, with these, the pre-judicious character of the ontological perspective that derives from it. The theoretical system is based on the concept of self-information, intended as a prerogative of the system that does not need to be informed by other entities (observers and creators included). The deductive approach that is adopted leads to develop a formalism analogous to the relativistic quantum mechanics theory. On the basis of this isomorphism it could be considered that some equations of physics "are those they are" because they regulate the minimal self-consistent system, that the present work implicitly identifies with the element of reality.

Key words - Self-information.

Riassunto - Prandel F., 2017 - Perché le equazioni della fisica "sono quelle che sono"?

Con l'intento di esaminare la questione il presente lavoro si propone di definire il *sistema autoconsistente minimale*, inteso come il più semplice ente *autonomo*. Il minimalismo che presiede a questo tentativo di definizione si propone di ridurre al minimo le assunzioni di carattere *aprioristico* e, con queste, il carattere pre-giudizievole della prospettiva ontologica che ne deriva. L'impianto teorico esposto si basa sul concetto di *autoinformazione*, intesa come prerogativa dell'ente che *non necessita* di essere *informato* da enti altri (osservatori e creatori compresi). L'approccio *deduttivo* che viene adottato porta a sviluppare un formalismo analogo a quello della *meccanica quantistica relativistica*. Sulla base di questo *isomorfismo* si potrebbe ritenere che alcune equazioni della fisica «sono quelle che sono» perché regolano il sistema autoconsistente minimale, ente che il presente lavoro identifica implicitamente con l'*elemento di realtà*.

Parole chiave - Autoinformazione.

> Le particelle elementari del *Timeo* di Platone non sono, in fondo, sostanza ma forme matematiche. "Tutte le cose sono numeri" è una proposizione attribuita a Pitagora. Le sole forme matematiche disponibili a quel tempo erano le forme geometriche dei solidi regolari o i triangoli che formano la loro superficie. Anche nella moderna teoria dei quanta si troverà senza dubbio che le particelle elementari sono in definitiva delle forme matematiche, ma di natura alquanto più complicata.
>
> *Werner Heisenberg* (Heisenberg 2013, p. 89)

Introduzione

Ci permettiamo di introdurre questo lavoro prendendo spunto dalle seguenti citazioni, che riteniamo particolarmente adatte a delinearne l'intento.

> L'idea di una gamma continua, così familiare ai matematici di oggi, è qualcosa del tutto eccessiva, un'enorme estrapolazione di quello che ci è accessibile.
>
> *Erwin Schrödinger* (cit. in Penrose 2005, p. 62)

> Un esame più attento mostra allora che un'infinità non ci è data in nessun modo, ma è interpolata o estrapolata per via di un procedimento intellettuale.
>
> *David Hilbert* (cit. in Zellini 2016, p. 100)

> Si possono dare buoni motivi per pensare che la realtà non possa essere rappresentata come un campo continuo. [...] fenomeni quantistici [...] devono condurre a un tentativo di trovare una teoria puramente algebrica per la descrizione della realtà. Ma nessuno sa come ottenere i fondamenti di una simile teoria.
>
> *Albert Einstein* (cit. in Penrose 2005, p. 62)

> La principale idea unificante è facile da spiegare: *non si deve partire dallo spazio, o da qualcosa che si muove nello spazio*, bensì da qualcosa che sia puramente quantistico e abbia, invece dello spazio, qualche genere di struttura puramente quantistica.
>
> *Lee Smolin* (Smoolin 2007, p. 238)

> *Perché le leggi sono queste*? Perché l'universo è governato da un insieme particolare di leggi? Che cosa ha fatto scegliere queste leggi e non altre che avrebbero potuto governare il mondo?
>
> *Lee Smolin* (Smoolin 2014, p. 99)

Secondo Paul Dirac «Il fisico moderno non ritiene che le equazioni con cui ha a che fare siano arbitrariamente scelte dalla Natura. C'è una ragione (che egli deve trovare) per cui esse sono quelle che sono: una ragione tale che, una volta scoperta, lo studio di queste equazioni risulterà più interessante di quello di tutte le altre» ([1]). Il presente lavoro si propone di individuare una possibile «ragione» per cui alcune equazioni della fisica «sono quelle che sono».

Se la «Natura» fosse *esistenzialmente subordinata* a qualche *ente sovrannaturale*, cioè se *non* fosse *onticamente autonoma*, questa «ragione» avrebbe carattere *trascendente*. In tal caso sarebbe alquanto ozioso tentare di individuarla, perlomeno nei modi e con i mezzi della "filosofia naturale". Se invece la «Natura» non dipendesse da eventuali enti *altri*, cioè da enti *non naturali*, allora si tratterebbe necessariamente di un *sistema autoconsistente* o, più in generale, di una pluralità di siffatti sistemi ([2]). In questo caso la «ragione» in questione sarebbe puramente *immanente*, cioè una «ragione» prettamente *naturale*, e sembrerebbe ragionevole ritenere che debba essere la seguente: le leggi di «Natura» «sono quelle che sono» perché ne esprimono formalmente lo *statuto autonomo*. In effetti, se la «Natura» bastasse a sé stessa, le sue leggi dovrebbero in qualche modo esprimerne l'autonomia ontica (*autónomos*: che si da la proprie leggi). La domanda che sorge spontanea, allora, è la seguente: le equazioni *fondamentali* della fisica descrivono sistemi autoconsistenti? ([3]).

Nel tentativo di proporre una risposta per quanto possibile *obiettiva* e *indipendente* non prenderemo le mosse dalle leggi fisiche in vigore: procederemo invece configurando quello che riteniamo essere il *sistema autoconsistente minimale* (Ψ nel seguito), in modo da individuare il formalismo idoneo a trattare l'autoconsitenza, e poterlo confrontare con quello che viene utilizzato per descrive i sistemi fisici. Il *minimalismo* che caratterizza la prospettiva ontologica esposta si propone di impiegare «un numero minimo di concetti e di relazioni primarie» (Einstein, 2014, p. 40), e di «non moltiplicare gli enti più del necessario» (G. da Occam, trad. cit. Boniolo, 1997, p. 541). Per questo, nel caratterizzare Ψ, ci lasceremo guidare dalla *necessità* più che dall'*evidenza*, con il ché l'indagine esposta viene a configurarsi come una particolare versione di *metafisica formale* ([4]).

([1]) Dirac, 2013, p. 31.

([2]) Come preciseremo in seguito, per "sistema autoconsistente" intendiamo un sistema che si *autodetermina*.

([3]) I principi di *conservazione* – e le soggiacenti *simmetrie* – sembrano buoni indizi di *autonomia* ontica della «Natura».

([4]) La *metafisica*, e in particolar modo quella sua branca che va sotto il nome di *ontologia*, viene qui intesa come ricerca delle «strutture fondamentali dell'essere» (Dorato, 2013, p. 19).

> E l'*informazione*? Informazione *fornita da chi*? Informazione su *che cosa*?
> [...]
> È come se un serpente cercasse di inghiottire sé stesso dalla coda. La cosa è possibile, fino a un certo punto. Ma diventa imbarazzante per gli spettatori, ancor prima che scomodo per il serpente.
>
> *John S. Bell* (Bell, 2010, pp. 289, 297)

Esposizione

In linea del tutto generale un *sistema* si lascia caratterizzare come un insieme di *elementi* tra i quali sussistono delle *relazioni*. Il sistema *minimale* è costituito da *due* elementi *distinti* A e B, e dalla loro relazione *simmetrica* Ω ([5]). Diremo *autoconsistente* un sistema se si *autodetermina coerentemente* e *completamente*. L'autoconsistenza del sistema richiede che A sia determinato dalla sua relazione Ω con B, e che B sia determinato dalla sua relazione Ω con A. Senza perdita di generalità la relazione Ω può dunque essere caratterizzata come una *trasformazione reversibile*, e gli elementi distinti A e B come le *forme differenti* che la relazione Ω *tras-forma* l'una nell'altra.

1 $$\Psi:\ A \underset{\Omega}{\overset{\Omega}{\rightleftarrows}} B$$

Nell'ottica puramente *sistemica* che definisce Ψ *non è logicamente necessario* intendere la *trasformazione* come un *processo* nel senso *temporale* del termine, né la *forma* come una *configurazione* nel suo senso *spaziale* (cfr. nota 7). Non introduciamo dunque *a priori* né tempo né spazio. Categorie ad esse formalmente assimilabili emergeranno invece *a posteriori* come *necessità ontologiche* proprio dalla caratterizzazione matematica di Ψ.

L'autoconsistenza di Ψ richiede che le *forme* A e B risultino *indipendenti* da eventuali "pozzi" o "sorgenti" di *in-formazione* estranei al sistema (come potrebbero essere "osservatori" o "creatori"). Ciò implica che, nella sua caratterizzazione minimale, la forma A esprime *tutta e solo* l'informazione relativa alla forma B, e che la forma B esprime *tutta e solo* l'informazione relativa alla forma A ([6]). Ciascun elemento di Ψ è dunque forma per sé e

---

([5]) La relazione *simmetrica* Ω non è una relazione di *equivalenza* perché, essendo Ψ un sistema, gli elementi A e B sono necessariamente *distinti* (identità degli indiscernibili di Leibniz). In effetti, non è *riflessiva*, né può essere *transitiva*.

([6]) Questa caratterizzazione può ritenersi minimale nel senso che interpreta gli elementi A e B come informazione *tout court*, non come *enti* che *veicolano* informazione ma che non possono ridursi esclusivamente alla stessa. Ad esempio un «solido aperiodico» informazione per l'altro. In questo contesto, pertanto, "forma" e "informazione" sono da intendersi come concetti relativi ([7]).

Per proseguire nella caratterizzazione di Ψ occorre interrogarsi sulla natura dei suoi elementi A e B, dunque sulla natura dell'informazione ([8]). In generale l'informazione si presenta sottoforma di *sequenze*, i cui *termini* possono presentare differenze quantitative o qualitative ([9]). Con Ernest Rutherford ([10]) potrebbe apparire iperbolico affermare che «la qualità è nient'altro che quantità scadente» ma, in effetti, nel mondo microfisico le differenze qualitative del mondo macrofisico sembrano ridursi a differenze quantitative ([11]). Pare perciò ragionevole ritenere che, nella sua versione minimale, l'informazione si presenti come una *sequenza numerica*, l'unica i cui termini presentano *differenze* puramente *quantitative*, tant'è vero che sembra essere la sola gestibile dalle macchine. Sulla scorta di queste considerazioni caratterizziamo gli elementi A e B come le N-ple ordinate $A_t=a_1,\dots,a_N$ e $B_t=b_1,\dots,b_N$. Ciò consente di qualificare la trasformazione Ω. Infatti, dal momento che trasforma l'una nell'altra le N-ple A_t e B_t, deve

---

– così Erwin Schrödinger immaginava una «fibra cromosomica» in tempi non sospetti – è qualcosa di più dell'informazione che veicola (SCHRÖDINGER, 1995, p. 106). Nel contesto del presente lavoro l'informazione non può essere definita come *riduzione dell'incertezza*: deve invece intendersi nel senso *letterale* del termine, secondo il quale "informare" vuol dire "dare forma". Gli elementi A e B di Ψ *si informano a vicenda* nel senso che la forma dell'uno è data dalla sua relazione Ω con la forma dell'altro.

([7]) I termini "informazione", "trasformazione" e "forma" vengono qui intesi in senso astratto, senza riferimento alcuno alle categorie spazio-temporali. Anziché introdurli come termini *primitivi* (cioè *non definiti*), poiché si riferiscono a Ψ conviene definirli *circolarmente* sulla base delle categorie aristoteliche *potenza* e *atto*. Definiamo dunque l'informazione come *stato potenziale della forma* e la forma come *stato attuale dell'informazione*. In questo contesto per "trasformazione" si intende perciò la relazione tra informazione e forma intese come *potenza* e *atto* (a titolo puramente analogico si considerino i rapporti tra genotipo e fenotipo di un sistema biologico). Ciascuno degli elementi A e B di Ψ è dunque atto per sé e potenza per l'altro. In ciò proponiamo un'alternativa atemporale, chiusa e non finalistica alla progressione temporale, aperta e finalistica entro cui Aristotele colloca l'attuarsi della potenza. In termini di *ontologia primitiva* ognuno degli elementi A e B di Ψ *ex-siste* (procede dall'altro), mentre l'ente Ψ che li comprende è (non procede da alcunché): lo *status* ontologico di Ψ è quello dell'*essere*, non quello dell'*esistere* (cfr. nota 4).

([8]) Questa è l'unica circostanza in cui, nel coso della trattazione, faremo riferimento all'*evidenza*.

([9]) L'evidenza fornisce vari esempi di informazione *sequenziale*: le sequenze numeriche elaborate dai calcolatori elettronici, le sequenze nucleotidiche che esprimono l'informazione genetica, le sequenze simboliche che costituiscono uno scritto, uno spartito musicale, ecc. Per "sequenza" intendiamo un numero *finito* (N nel seguito) di termini *ordinati*.

([10]) Cit. in BARONE & GIORELLO, 2016, p. 171.

([11]) Basti pensare allo spettro cromatico della luce visibile in relazione alla sua frequenza, o ai differenti aspetti visibili degli elementi del sistema periodico in relazione al loro numero atomico.

essere un *operatore*. L'autoconsistenza del precedente sistema ontologico viene perciò espressa dal seguente sistema matematico.

2 $$\begin{cases} \Omega a_t = b_t \\ \Omega b_t = a_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Omega^2 a_t = a_t \\ \Omega^2 b_t = b_t \end{cases}$$

Sommando e sottraendo membro a membro le equazioni del primo sistema 2 si ottiene il seguente, dal quale si evince che l'operatore Ω è *lineare* ed *hermitiano*.

3 $$\begin{cases} \Omega(a_t + b_t) = +(a_t + b_t) \\ \Omega(a_t - b_t) = -(a_t - b_t) \end{cases}$$

Le equazioni del sistema 3 si possono sintetizzare come segue, dove $\Psi_t = \psi_1, \ldots, \psi_N$.

4 $$\Omega\psi_t = \pm\psi_t \qquad \psi_t = a_t \pm b_t$$

Per esplicitare l'operatore Ω – e quindi le sue autosequenze Ψ_t – occorre considerare una caratteristica generale dell'*informazione sequenziale* e dunque, in particolare, delle sequenze numeriche intese come vettori informativi. Ogni sequenza che esprime informazione presuppone un alfabeto che contiene (almeno due) simboli *differenti* ([12]). Il motivo per cui questo requisito risulta irrinunciabile è evidentemente legato al fatto che in una sequenza di simboli tutti uguali, cioè nella ripetizione dello stesso simbolo, non può essere codificata alcuna informazione. Nel caso specifico che interessa, quello delle sequenze numeriche, ciò si traduce nel fatto che una sequenza *costante* non esprime informazione indipendentemente dal valore della costante ([13]). Ne consegue che tutte le sequenze costanti sono *informativamente equivalenti*, proprio in quanto presentano tutte lo stesso contenuto informativo nullo. Per garantire la *coerenza* di Ψ, allora,

([12]) Ad esempio il codice binario e il codice Morse utilizzano solamente due caratteri differenti (rispettivamente 0,1 e ·, –).

([13]) Le necessarie differenze tra i termini di una sequenza numerica informativa, e l'indipendenza del suo contenuto informativo da una costante additiva, fanno già presagire la natura *differenziale* dell'operatore Ω. Sebbene il concetto di informazione venga qui inteso in maniera differente da come è definito nella teoria dell'informazione (Shannon, 1948), non sembra del tutto incompatibile con la stessa. A questo proposito si consideri, come "sorgente di informazione", l'applicazione dell'operatore Ω ad una generica sequenza S_n, e si supponga che "emetta" costantemente lo stesso simbolo, cioè che ΩS_n sia una sequenza numerica *costante*. Dal punto di vista della suddetta teoria tale simbolo risulta emesso con *probabilità unitaria*, per cui presenta un *contenuto informativo nullo*, come la sequenza che lo replica.

l’operatore Ω deve trasformarle *tutte* nella *stessa* sequenza. Inoltre, imponendo che le sequenze A_t e B_t si informino reciprocamente, la coerenza di Ψ richiede che l’operatore Ω *conservi l’informazione*, cioè che le sequenze A_t e B_t esprimano la stessa *quantità di informazione* ([14]). In sintesi, Ω deve trasformare tutte le sequenze costanti nella stessa sequenza costante, per cui dovrebbe trattarsi dell’operatore *differenza* Δ, con il ché le sequenze A_t e B_t sarebbero l’una la sequenza degli *incrementi* dell’altra. Si noti, tuttavia, che Δ trasforma tutte le sequenze costanti nella sequenza costantemente nulla anche se (il risultato che restituisce) viene diviso per una *costante non nulla* (o moltiplicato per il suo reciproco), per cui Ω coincide con Δ a meno della stessa. Le soluzioni ψ_t della 4 sono *circolari* solo se tale costante è *immaginaria*, per cui la indicheremo con ±iμ, con μ *reale e positivo* ([15]). Posto dunque Ω=Δ/±iμ, riscriviamo la 4 come segue, dove μ è l’autovalore di Δ/±i ([16]).

5 $$\Delta\psi_t = \pm i\mu\psi_t \qquad \mu \in \mathbb{R} : \mu \succ 0$$

La 5 esprime formalmente – attraverso il primo sistema 2 da cui è stata dedotta – la *coerenza* di Ψ, ragion per cui nel seguito verrà detta *condizione di autocoerenza*. Il termine generale ψ_t della sequenza Ψ_t che risolve la 5 e i termini generali a_t e b_t delle sequenze A_t e B_t sono i seguenti, dove ψ_0 è una costante generalmente complessa,

6 $$\psi_t = \psi_0 \exp(\pm i\omega t) \qquad a_t = \psi_0 \cos(\omega t) \qquad b_t = \pm i\psi_0 \sin(\omega t) \qquad \psi_0 \in \mathbb{C}$$

mentre l’autovalore μ ha la seguente espressione ([17]).

([14]) La quantità di informazione – necessariamente *positiva* – è espressa dal valore della *costante* reale μ che introdurremo nella 5, dalla quale si evince che μ quantifica l’*informazione differenziale* tras-formata da Δ.

([15]) Le soluzioni *iperboliche* della 4 vanno scartate in quanto *successioni aperiodiche* (non è possibile imporre la *condizione di periodicità* – come faremo per le soluzioni circolari – così da ridurle a *sequenze*, cioè a N-ple ordinate). Il doppio segno ammette la *posizione* $\psi_t^{(+)}$ e la sua *negazione* $\psi_t^{(-)}$, due “proposizioni” che esprimono la quantità μ di informazione: la loro congiunzione $\psi_t^{(+)} \wedge \psi_t^{(-)}$ è una “contraddizione”, cioè una “proposizione” *priva di informazione*.

([16]) Si noti che, in questo contesto, non è l’indice *t* a *ordinare* i termini delle sequenze A_t e B_t (si *de-terminano l’una l’altra*, dunque *auto-ordinano* i propri *termini*): è l’ordinamento intrinseco nei termini a *indurre* (a far *emergere*) l’indice *t*, che va dunque considerato sì come una *variabile ordinale*, ma nel senso *passivo* del termine. Diversamente, prima di introdurlo avremmo dovuto darne giustificazione in termini ontologici, cioè invocarne la scansione ad opera di un ente necessariamente *estraneo* a Ψ il quale però, a questo punto, non potrebbe più dirsi autoconsistente.

([17]) Il parametro ω è superiormente limitato da π/2 perché, risolvendo l’equazione alle differenze finite 5, non si ottiene (direttamente) la 6 ma la soluzione $\psi_t=\psi_0\exp[\pm i(\arcsin \mu)t]$, 7 $$\mu = \sin\omega \qquad \mu \in \mathbb{R} : 0 \prec \mu \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \omega \in \mathbb{R} : 0 \prec \omega \leq \pi/2$$

Per verificare la 6 e la 7 applichiamo l'operatore Δ alla ψ_t 6 ([18]).

8 $$\Delta\psi_t = \Delta[\psi_0 \exp(\pm i\omega t)] = \frac{\exp[\pm i\omega(t+1)] - \exp[\pm i\omega(t-1)]}{2}\psi_0 = \\ = \frac{\exp(\pm i\omega) - \exp(\mp i\omega)}{2}\psi_0 \exp(\pm i\omega t) = (\pm i \sin\omega)\psi_t = \pm i\mu\psi_t$$

Poiché l'operatore Δ prende ad argomento il precursore ψ_{t-1} e il successore ψ_{t+1} di ogni termine y_t sul quale opera, la sequenza Ψ_t è necessariamente una N-pla *chiusa*, nel senso che ognuno dei suoi termini *deve* avere un termine precursore e un termine successore che appartengono a Ψ_t stessa. Ciò pone ulteriori restrizioni ai valori del parametro ω. Infatti, la chiusura delle autosequenze dell'operatore Δ richiede che ψ_1 sia il successore di ψ_N, cioè che sia $\psi_0=\psi_N$, ovvero che risulti soddisfatta la *condizione di periodicità* $\exp(\pm i\omega N)=1$, per cui tali valori si riducono ai seguenti.

9 $$\omega = 2\pi\frac{o}{N} \qquad\qquad o \in \mathbb{N} : 0 \prec o \leq N/4 \Rightarrow N \geq 4$$

La 9 converte l'angolo graduale *o* nell'angolo radiante ω ([19]). Indicato con *h* il grado angolare implicito nella 9, riscriviamo la 6 con le sostituzioni *simboliche* $\hbar=h/2\pi$, $\nu=o/N$ e $E=h\nu=\hbar\omega$ ([20]).

---

e la funzione arcoseno è definita nell'intervallo [−1,1]. La quantità μ di informazione differenziale è dunque una funzione *monotona crescente* del parametro ω, che si approssima allo stesso quando questo assume piccoli valori (rispetto al radiante).

([18]) In questo contesto Δ va inteso come l'operatore che, applicato ad una generica sequenza $S_n=s_1,\dots,s_N$, *media* tra gli incrementi destro $s_{n+1}-s_n$ e sinistro s_n-s_{n-1} rispetto al generico termine s_n, cioè come l'operatore che prende ad argomento il successore s_{n+1} e il precursore s_{n-1} di s_n per restituire la loro *semidifferenza*. Tale interpretazione di Δ muove dal fatto che, in questo lavoro, *t* è un numero *ordinale*, per cui non è possibile assegnare indici *pari* ad una sequenza e indici *dispari* all'altra, o indici *interi* all'una e *semi-interi* all'altra (le sequenze A_t e B_t non sono *sfalsate*).

$$\Delta s_n = \frac{(s_{n+1} - s_n) + (s_n - s_{n-1})}{2} = \frac{s_{n+1} - s_{n-1}}{2}$$

Sebbene il terzo membro di queste uguaglianze sia interpretabile come *rapporto incrementale* – il denominatore 2 è uguale a (n+1)–(n-1) – ribadiamo che viene qui inteso come *incremento medio*.

([19]) Qui e nel seguito indichiamo gli angli graduali con le lettere latine, e i relativi angoli radianti con le corrispondenti lettere greche. A titolo analogico, il fattore che converte *n* gradi sessagesimali ($n°$) in radianti è $2\pi n°/360°$.

([20]) I termini generali 6 sono *periodici* solo se ν è razionale, cioè se vale o/N. Se invece ν è irrazionale o trascendente, oscillano *senza ripetizione* alcuna dei termini, risultando perciò *aperiodici*. Infatti, una *successione* è periodica se i suoi termini si ripetono identicamente e

10 $$\psi_t = \psi_0 \exp(\pm i\omega t) = \psi_0 \exp\left(\pm i 2\pi \frac{oh}{Nh} t\right) = \psi_0 \exp\left(\pm i \frac{h\nu}{\hbar} t\right) = \psi_0 \exp\left(\pm i \frac{E}{\hbar} t\right)$$

La necessaria *chiusura* delle autosequenze A_t e B_t richiede di trattare l’indice *t* come un indice *modulare* di modulo N. Poiché l’aritmetica modulare di modulo N non presenta aspetti patologici (divisori dello zero) solo se N non ha divisori diversi dai divisori banali 1 e N, il naturale N è necessariamente *primo*. In nota 24 preciseremo questo argomento a sostegno della primalità di N.

Esaminiamo ora la costante complessa ψ_0 che compare nella 6. Esprimendola in forma polare, ponendone cioè il modulo pari a ρ e l’anomalia pari a φ, si può riscrivere la 6 come segue ([21]).

11 $$\psi_t = \rho \exp(\mp i\varphi)\exp(\pm i\omega t) = \rho \exp[\pm i(\omega t - \varphi)]$$

La 11 soddisfa la 5 per *qualunque* valore reale dell’anomalia φ ([22]). Tuttavia, il *carattere sequenziale* dell’informazione e la *necessaria chiusura* delle sequenze informative impongono di considerarne solo i valori *graduali*, cioè quelli dati dalla suddivisione del piano complesso in N gradi angolari ([23]). Uniformiamo dunque la notazione della fase $\omega t - \varphi$ fattorizzando l’anomalia φ nei fattori κ e *x*, cioè ponendo $\varphi = \kappa x$. La necessità di fattorizzare questo *grado di libertà* di Ψ risulterà evidente nel seguito (cfr. 25 e 27). La *gradualità* di φ richiede che *x* sia modulare di modulo N, e che l’espressione di κ sia la seguente.

12 $$\kappa = 2\pi \frac{k}{N} \qquad k \in \mathbb{N} : 0 \le k \le M \qquad x \in \mathbb{N} : 0 \le x \le M \qquad M = (N-1)/2$$

Richiedendo di selezionare un *particolare valore* di $\varphi = \kappa x$, la 11 è una *soluzione particolare* della 5. Ciò porta a generalizzarla tramite il seguente

---

ordinatamente ogni N passi (incrementi unitari dell’indice), nel qual caso N è il periodo della successione, che può dunque ridursi a una *sequenza* di N termini.

([21]) L’inversione del doppio segno dell’anomalia φ verrà giustificata in seguito (cfr. 31).

([22]) Nell’ambito del presente lavoro l’anomalia φ deve considerarsi *aleatoria*, anziché *arbitraria*, perché la richiesta di autoconsistenza non ammette *arbitri* che ne fissino il valore, cioè *enti altri* che informino Ψ. Per non introdurre nel formalismo opzioni arbitrarie occorre dunque contemplare *tutti* i possibili valori di φ. A titolo analogico notiamo che un dado da gioco è, di per sé, un oggetto del tutto *determinato*: è l’*arbitro* che «gioca a dadi» a ritenerlo *indeterminato*.

([23]) Dal punto di vista geometrico l’anomalia φ è legata alla *simmetria rotazionale* dell’N-gono regolare di vertici ψ_t (inscritto nella circonferenza di raggio ρ centrata nell’origine del piano complesso), simmetria che è di ordine N.

termine generale $\Psi_{t,x}$, dove $f_{t,k}$ è la sua trasformata discreta di Fourier, e dove ρ si identifica con la costante di normalizzazione 1/√N ([24]).

13 $$\psi_{t,x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=-M}^{k=+M} f_{t,k} \exp\left(\mp i2\pi \frac{kx}{N}\right) \qquad f_{t,k} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{x=-M}^{x=+M} \psi_{t,x} \exp\left(\pm i2\pi \frac{kx}{N}\right)$$

Le 13 impongono le seguenti condizioni che si implicano a vicenda, per cui ci riferiremo alla prima.

14 $$\sum_{x=-M}^{x=+M} \left|\psi_{t,x}\right|^2 = 1 \qquad \sum_{k=-M}^{k=+M} \left|f_{t,k}\right|^2 = 1$$

Verrà detta *condizione di autocompletezza* perché la sua sussistenza è garantita dalla *completezza* di Ψ, cioè dal fatto che le armoniche 15 sovrapposte dalla 13 – secondo i pesi *complementari* $|f_{t,k}|^2$ – formano un insieme *completo* di sequenze ortonormali ([25]).

15 $$\psi_{(\kappa)t,x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[\pm i(\omega t - \kappa x)] \qquad \sigma_x^2 = \frac{N^2-1}{12} \qquad \sigma_k^2 = 0$$

I ruoli dei fattori *k* e *x* dell'anomalia φ=κ*x*=2π*kx*/N sono *intercambiabili*, nel senso che è possibile considerare *k* come un *parametro* e *x* come un *indice* ma anche viceversa, con il ché Ψ è *necessariamente simmetrico* rispetto al ruolo dei due fattori. Pertanto, a meno che gli stessi non presentino la *stessa* varianza, Ψ si dà necessariamente – rispetto al supporto {*x*} (o rispetto al supporto {*k*}) – secondo due modalità *complementari*: la *delocalizzazione*, che esprime la prevalenza della varianza di *x* su quella di *k* (o viceversa), e la *localizzazione*, che esprimere invece la *medesima* – per simmetria – prevalenza della varianza di *k* su quella di *x* (o viceversa). Infatti, per le ragioni esposte in nota 22, il regime di autoconsistenza non ammette opzioni *arbitrarie*, per cui Ψ *sovrappone necessariamente* queste sue *possibilità* ontiche *distinte*. Nel caso limite in cui Ψ assume la forma armonica 15, assume dunque necessariamente anche la seguente forma impulsiva.

16 $$\psi_{(x)t,x} = \frac{1}{N} \sum_{k=-M}^{k=+M} \exp[\pm i(\omega t - \kappa x)] \qquad \sigma_x^2 = 0 \qquad \sigma_k^2 = \frac{N^2-1}{12}$$

([24]) Poiché N è primo (e maggiore di 4, cfr. 9) è anche *dispari* (2 è l'unico primo pari), per cui M è intero. Le 13 sono consistenti con il carattere aleatorio dell'anomalia φ dal quale sono state dedotte a patto che N sia primo, perché solo in questo caso ogni armonica presenta – nell'ordine che le è proprio – *tutte* le anomalie permesse (per ogni *k* e *x* divisori non banali di N si ha φ=0). Si noti che, per ogni N≥4 *primo* (5,7,11,13,17,…) le varianze σ_x^2 15 e σ_k^2 16 sono *naturali*.

([25]) Il coefficiente 1/√N normalizza tutte le armoniche 15, il ché è reso possibile dall'estensione *finita* N del supporto {*x*}.

Ψ è perciò *dicotomico*, nel senso che com-prende la forma 15 e la forma 16, ognuna delle quali *annulla* la varianza del fattore della fase $\varphi=2\pi kx/N$ che ha varianza *non-nulla* per l’altra ([26]).

In corrispondenza di t=0 (e di ogni altro valore di t) la 15 è completamente delocalizzata,

17 $$\psi_{(k)0,x} = \frac{\exp(\mp i\kappa x)}{\sqrt{N}} \qquad \left|\psi_{(k)0,x}\right|^2 = \frac{1}{N}(\forall x)$$

con il ché la 17 *non* fornisce alcun riferimento *ontico* agli indici t e x della 15. I riferimenti di tali indici sono quindi necessariamente *arbitrari*, dunque *epistemici*. La 16, invece, in corrispondenza di t=0 è localizzata in x=0,

18 $$\psi_{(x)0,x} = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \delta_x \qquad \left|\psi_{(x)0,x}\right|^2 = \begin{cases} 1(x=0) \\ 0(x\neq 0) \end{cases}$$

ragion per cui la 18 rappresenta il riferimento *ontico*, dunque *non arbitrario*, degli indici t e x che compaiono nella 16. Poiché la 15(17) e la 16(18) sono espressioni *indipendenti* di Ψ, il riferimento della sequenza esponenziale complessa 17 (delocalizzata) *non è correlato* a quello del suo complemento ontico, cioè a quello della sequenza seno cardinale 18 (localizzata), per cui la forma impulsiva 18 di Ψ seleziona *casualmente* (cfr. nota 26) un valore del supporto $\{x\}$ della sua forma armonica 17. La correlazione tra i loro riferimenti non solo *non è richiesta* dalla simmetria della fattorizzazione κx dell’anomalia φ: è anche *logicamente necessario* che questi riferimenti non siano correlati. Infatti, la *posizione aleatoria* assunta dalla forma seno cardinale di Ψ rispetto alla sua forma esponenziale complessa esprime l’aleatorietà dell’anomalia φ da cui è stata dedotta ([27]).

([26]) Parliamo di “dicotomia”, anziché di “dualismo”, perché la 15 e la 16 non si escludono a vicenda: al contrario, non può darsi l’una senza che si dia l’altra. Infatti, *fissare* un qualsiasi valore di k (15) vuol dire trasferire l’aleatorietà di φ su x ma, essendo Ψ *simmetrico* rispetto al ruolo dei fattori k e x di φ, per rispettare questa simmetria occorre contestualmente fissare un *qualsiasi* valore di x (16), cioè trasferire l’aleatorietà di φ su k. Ψ va perciò inteso come *congiunzione* logica “e” ($\wedge$) – anziché come *disgiunzione* logica “o” ($\vee$) – delle sue possibilità ontiche distinte 15 e 16. La simmetria di Ψ che da luogo a questa dicotomia non si manifesta considerando *solo* il supporto $\{x\}$, ragion per cui la 15 e la 16 sono espressioni affatto *diverse* di Ψ: per apprezzarla occorrerebbe, contestualmente, considerare il supporto $\{k\}$ (cioè considerare non solo la 15 e la 16, ma anche le loro trasformate discrete di Fourier).

([27]) Si osserva che il *modulo quadro dell’esponenziale complesso* è costante entro il supporto $\{x\}$, come la *distribuzione di probabilità* con cui il seno cardinale vi prende posizione. L’identificazione del primo con la seconda è logicamente necessaria in quanto la *diffusione* della forma localizzata di Ψ implica la (ed è implicata dalla) *controdiffusione* della sua forma delocalizzata, fino ad *identificarsi* entrambe – per $N\to\infty$ – con lo smorzamento

L'indice t ordina i termini della sequenza Ψ_t, e quindi i termini delle sequenze A_t e B_t che si determinano reciprocamente, per cui verrà detto *indice deterministico*. L'indice x verrà invece detto *indice statistico* per le ragioni appena esposte.

Ψ è dunque descritto, in generale, da combinazioni lineari normali delle armoniche 15 ([28]). Tuttavia, se tali combinazioni soddisfano la condizione di autocompletezza 14, non soddisfano necessariamente la loro condizione di autocoerenza 5, che riscriviamo in forma quadratica e tenendo conto del fatto che le ψ sono sequenze a *due* indici (per cui specifichiamo al pedice di Δ l'indice rispetto al quale Δ valuta l'incremento medio di ψ).

19 $$-\Delta_t^2\psi = \mu_\omega^2\psi \qquad \mu_\omega = \sin\omega$$

Infatti, il parametro deterministico ω e il parametro statistico κ non sono necessariamente *indipendenti* l'uno dall'altro, con il ché le armoniche 15 non sono necessariamente relative al medesimo autovalore μ_ω^2. Per reperire una condizione di autocoerenza che risulti generalmente soddisfatta dalla $\psi_{t,x}$ 13, conviene osservare che le sequenze armoniche 15 risultano autocoerenti nell'indice statistico x, oltre che nell'indice deterministico t.

20 $$-\Delta_x^2\psi = \mu_\kappa^2\psi \qquad \mu_\kappa = \sin\kappa$$

La condizione di autocoerenza *generale* (deterministica *e* statistica) deve allora riunire in un'unica equazione la 19 e la 20. In prima analisi le *sottraiamo* l'una dall'altra per ottenere un'equazione differenziale alle differenze parziali ([29]). Così facendo si ottiene quanto segue.

21 $$-\Box\psi = \mu^2\psi \qquad \Box = \Delta_t^2 - \Delta_x^2 \qquad \mu^2 = \mu_\omega^2 - \mu_\kappa^2 = \sin^2\omega - \sin^2\kappa$$

Come si evince sommando e sottraendo membro a membro le equazioni dei sistemi 2, la condizione di autocoerenza – oltre che nella forma quadra-

---

gaussiano dei polinomi di Hermite. La distribuzione *normale* dei valori di k e x determina un *minimo locale* per il prodotto delle relative varianze.

([28]) Dal momento che – per non appesantire inutilmente l'esposizione – la discussione a seguire si riferisce esclusivamente alla k-esima sequenza armonica $\Psi_{(k)t,x}$ 15 (non consideriamo il suo complemento ontico $\Psi_{(x)t,x}$ 16), ometteremo generalmente il pedice k tra parentesi. Per snellire la notazione ometteremo anche gli altri pedici.

([29]) La 20 va *sottratta* alla 19, anziché *sommata*, perché l'autovalore statistico μ_κ^2 va sottratto a quello deterministico μ_ω^2. Infatti, a differenza del parametro statistico κ, quello deterministico ω presenta necessariamente un *limite inferiore* non nullo $\omega_0=2\pi/N>0$ (cfr. 9) – relativo alla sequenza fondamentale ψ_0 - compatibile con la rotazione iperbolica ($\mu^2=\mu_\omega^2-\mu_\kappa^2$) ma non con quella circolare ($\mu^2=\mu_\omega^2+\mu_\kappa^2$). Infatti, ponendo $\omega=0$ viene meno l'autocoerenza di Ψ (cfr. 19).

tica 21 – deve potersi esprimere in forma lineare. D’ora in poi indicheremo con *e* (anziché con *i* come di consueto) l’unità immaginaria circolare definita da $e^2 = -1$, per cui scriviamo come segue la versione lineare della 21 ([30]).

22 $$\Delta\psi = \pm e\mu\psi \qquad \Delta^2 = \Box$$

Decliniamo ora l’operatore differenziale Δ in modo che – assieme all’unità immaginaria e all’autovalore μ – fornisca l’espressione *generale* della *trasformazione* $\Omega = \Delta / \pm e\mu$. Seguendo Dirac (Penrose, 2005, pp. 619, 620) l’espressione dell’operatore Δ si ricava richiedendo che sia $\Delta^2 = \Box$, ossia determinando il coefficiente γ_0 e il coefficiente γ_1 che compaiono nella seguente uguaglianza,

23 $$\Delta^2 = (\gamma_0\Delta_t \pm \gamma_1\Delta_x)^2 = \gamma_0^2\Delta_t^2 \pm \{\gamma_0,\gamma_1\}\Delta_t\Delta_x + \gamma_1^2\Delta_x^2 = \Delta_t^2 - \Delta_x^2 = \Box$$

che debbono quindi intendersi come matrici quadrate *anticommutative* ([31]). In particolare, γ_0 deve essere a quadrato *positivo* mentre γ_1 deve essere a quadrato *negativo* (cfr. nota 29). A meno di una trasformazione di similitudine, il più piccolo insieme di matrici linearmente indipendenti e di ordine minore che soddisfano la 23 è costituito dalle seguenti.

24 $$\gamma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\Delta_t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\Delta_x$$

La condizione di autocoerenza generale 22 è *lineare*, cioè risulta soddisfatta dalla combinazione lineare 13 delle sequenze armoniche 15 – a condizione che il valore del parametro μ sia lo stesso per ognuna di esse, cioè a patto che le stesse sequenze armoniche siano *degeneri*. Ne consegue che l’autovalore μ^2 dev’essere *invariante* rispetto alla rotazione iperbolica (cfr. nota 29), cioè che μ deve rappresentarne il raggio nel piano complesso iperbolico (ω,κ). Si osserva, tuttavia, che la sua espressione 21 *non è compatibile* con tale richiesta. Invece delle equazioni quadratiche 19 e 20, si devono perciò sottrarre i quadrati dei rispettivi parametri e indici, cioè intendere la ψ che risolve la 22 come una sequenza a *parametro complesso iperbolico* e di *indice complesso iperbolico*. Ciò suggerisce di introdurre le matrici 24 nella sua fase, anziché nell’operatore Δ (cfr. nota 39). Indicata con *c* – anziché con ∍ come nell’uso – l’unità immaginaria iperbolica de-

([30]) La sostituzione simbolica i→*e* appena effettuata, e quella ∍→*c* che effettueremo a breve, vogliono proporre una corrispondenza tra le due unità immaginarie algebriche i e ∍ e le due costanti fisiche *e* e *c*.

([31]) Per non appesantire la notazione considereremo solo il segno alto della 23.

finita da $c^2=1$, occorre allora, in primo luogo, intendere la *coppia ordinata* di parametri (ω,κ) come il parametro complesso iperbolico $w=\omega-c\kappa$ di modulo ω_0 e fase α ([32]),

25 $$w=\omega-c\kappa=\omega_0\exp(-c\alpha)=\omega_0(\cosh\alpha-c\sinh\alpha)=\omega_0\frac{1-c\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}=\omega_0\frac{1-c\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=\omega_0\frac{w}{|w|}$$

26 $$\pm\omega_0=\sqrt{\omega^2-c^2\kappa^2}\qquad \beta=\tanh\alpha=\frac{c\kappa}{\omega}\qquad \alpha=\operatorname{arctanh}\beta$$

e quella di indici (t,x) come l'indice complesso iperbolico $z=t-x/c$ di modulo t_0 e fase α ([33]).

27 $$z=t-x/c=t_0\exp(-\alpha/c)=t_0(\cosh\alpha-c^{-1}\sinh\alpha)=t_0\frac{1-c^{-1}\tanh\alpha}{\sqrt{1-\tanh^2\alpha}}=t_0\frac{1-c^{-1}\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}=t_0\frac{z}{|z|}$$

28 $$\pm t_0=\sqrt{t^2-(x/c)^2}\qquad \beta=\tanh\alpha=\frac{x}{ct}\qquad \alpha=\operatorname{arctanh}\beta$$

In secondo luogo, utilizzando le matrici γ 24, esprimiamo come matrici *hermitiane* sia il parametro complesso iperbolico w 25 che l'indice complesso iperbolico z 27 ([34]).

29 $$\boldsymbol{w}=\omega\gamma_0-c\kappa\gamma_1=\begin{bmatrix}\omega & -c\kappa\\ c\kappa & -\omega\end{bmatrix}=\boldsymbol{w}^\dagger\qquad \boldsymbol{w}^2=\boldsymbol{w}^{\dagger 2}=\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^\dagger=\omega_0^2\mathbf{I}$$

30 $$\boldsymbol{z}=t\gamma_0-x\gamma_1/c=\begin{bmatrix}t & -x/c\\ x/c & -t\end{bmatrix}=\boldsymbol{z}^\dagger\qquad \boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{z}^{\dagger 2}=\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^\dagger=t_0^2\mathbf{I}$$

In questo modo l'operatore Δ, che si era reso necessario articolare (cfr. 24) per comporre la 19 con la 20, può tornare a intendersi semplicemente come *incremento medio* (cfr. nota 18), perché la fase delle autosoluzioni della 22 diventa la seguente ([35]).

([32]) D'ora innanzi il pedice 0 starà ad indicare $\alpha=0$, anziché $t=0$.

([33]) Si noti che, essendo $c^2=1$ per definizione, si ha $c=c^2/c=1/c$. La parte immaginaria di w e z è stata posta *negativa* affinché il formalismo risulti coerente con la scelta dichiarata in nota 31 (cfr. trasformazione in nota 39).

([34]) La necessità che le matrici $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{z}$ siano hermitiane risulterà evidente nel seguito (cfr. 37, tenendo presente che l'autovalore μ è reale). La matrice $\gamma_0-c\gamma_1$ è hermitiana perché γ_0 è *simmetrica* mentre γ_1 è *antisimmetrica*. C'è una seconda matrice a quadrato negativo ($e\gamma_0\gamma_1$) che anticommuta sia con γ_0 che con γ_1 (e da esse linearmente indipendente), ma non è antisimmetrica. Non può dunque essere utilizzata, nella 29 e nella 30, per definire le matrici $\boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{z}$.

([35]) La 31 sfrutta il fatto che $c\kappa/\omega=x/ct$, cioè che le fasi iperboliche α 26 e 28 sono necessariamente *identiche*, in quanto il parametro $\boldsymbol{w}$ e l'indice $\boldsymbol{z}$ sono *coniugati*. Si noti che $[\boldsymbol{w},\boldsymbol{z}]=0$.

31 $$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{w}\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}\omega t-\kappa x & 0\\ 0 & \omega t-\kappa x\end{bmatrix}=(\omega t-\kappa x)\mathbf{I}=\left(\omega_0 t_0\cosh^2\alpha-\omega_0 t_0\sinh^2\alpha\right)\mathbf{I}=\omega_0 t_0\mathbf{I}=u\mathbf{I}$$

La fase iperbolica α 26 e 28 è dunque un parametro *aleatorio* onticamente *irrilevante*. La fase circolare $\boldsymbol{u}$ viene introdotta in luogo del prodotto $\boldsymbol{wz}$ perché non è possibile variare uno dei suoi fattori senza variare anche l’altro (cfr. nota 35), con il ché viene a perdere di senso la distinzione tra *parametro* e *indice* che, come già considerato, è *arbitraria* (in particolare, in questo contesto, *epistemica*). Sebbene tali fattori siano matrici a elementi complessi iperbolici, la fase $\boldsymbol{u}$ è un numero reale, per cui la sua espressione matriciale 31 risulta superflua. Le autosequenze degli operatori $\Omega=\pm\Delta/e\mu$ sono dunque le seguenti.

32 $$\psi=\frac{1}{\sqrt{N}}\exp(\pm eu) \qquad \boldsymbol{\Psi}:\ \left(\frac{1}{\sqrt{N}}\cos u\right)\overset{\Omega}{\underset{\Omega}{\rightleftarrows}}\left(\frac{\pm e}{\sqrt{N}}\sin u\right)$$

L’espressione dell’autovalore μ si ottiene osservando che la *variazione* (minima) della fase $u=\omega_0 t_0$ corrisponde al grado angolare h di ampiezza radiante $\omega_0=2\pi/N$ (cfr. nota 29). Applichiamo alla 32 l’operatore incremento medio Δ.

33 $$\begin{aligned}\Delta\psi&=\Delta\left[\frac{1}{\sqrt{N}}\exp(\pm eu)\right]=\frac{1}{\sqrt{N}}\frac{\exp[\pm e(u+h)]-\exp[\pm e(u-h)]}{2}=\\&=\left[\frac{\exp(\pm eh)-\exp(\mp eh)}{2}\right]\frac{1}{\sqrt{N}}\exp(\pm eu)=(\pm e\sin h)\psi=\pm\mu\psi\end{aligned}$$

L’autovalore μ è dunque il seguente ([36]).

34 $$\mu=\sin\omega_0$$

Dal punto di vista *ontico*, cioè dal punto di vista di Ψ, il nostro lavoro potrebbe concludersi qui.

Riteniamo tuttavia utile provare ad assumere un punto di vista *epistemico*, cioè il punto di vista *di un arbitro*, il quale potrebbe non riconoscere il fatto che le matrici $\boldsymbol{w}$ 29 e $\boldsymbol{z}$ 30 *non* variano l’una indipendentemente dall’altra, e dunque perseverare nella distinzione tra *parametro* e *indice*. In quest’ottica, considerando la prima come un *parametro* complesso iperbolico e la seconda come un *indice* complesso iperbolico, riscriviamo la 32 come

([36]) Nel limite del modulo N che tende a infinito, si ha $\mu=\omega_0$, per cui la 34 si riduce alla prima delle 26.

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\mu}{\omega_0}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sin\omega_0}{\omega_0}=\lim_{N\to\infty}\frac{\sin(2\pi/N)}{(2\pi/N)}=1$$

segue, dove le **u** sono le automatrici colonna normalizzate ($\mathbf{u}^\dagger\mathbf{u}=1$) della matrice ***w*** relative all'autovalore ω_0 (cfr. 37) ([37]).

35 $$\psi_0 = \mathbf{u}_0^{(\pm)}\exp(\pm e w_0 z_0) \qquad \mathbf{u}_0^{(\pm)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{01}^{(\pm)} \\ \mathbf{u}_{02}^{(\pm)} \end{bmatrix} \qquad\qquad \psi = \mathbf{u}^{(\pm)}\exp(\pm e w z) \qquad \mathbf{u}^{(\pm)} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(\pm)} \\ \mathbf{u}_2^{(\pm)} \end{bmatrix}$$

In regime arbitrario le singole armoniche non sono normalizzabili, perché l'indice complesso iperbolico ***z*** 30 è *aperiodico* (dunque non più modulare di modulo N). In particolare, risulta inappropriato considerare ***z*** come un *indice* (cioè come una variabile *ordinale*, dunque *discreta*) perché la fase iperbolica α varia con continuità, e con essa ***z***, che intenderemo dunque come una *variabile complessa iperbolica continua* ([38]). La 33 va perciò riscritta come segue ([39]).

36 $$\frac{d}{dz}\psi = \frac{d}{dz}\left[\mathbf{u}^{(\pm)}\exp(\pm e w z)\right] = \pm e w \mathbf{u}^{(\pm)}\exp(\pm e w z) = \pm e \mu \mathbf{u}^{(\pm)}\exp(\pm e w z) = \pm e\mu\psi$$

La 36 pone la seguente equazione matriciale,

37 $$\boldsymbol{w}\mathbf{u}^{(\pm)} = \pm\mu\mathbf{u}^{(\pm)} \qquad\qquad \begin{bmatrix} \omega & -c\kappa \\ c\kappa & -\omega \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(\pm)} \\ \mathbf{u}_2^{(\pm)} \end{bmatrix} = \pm\mu\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(\pm)} \\ \mathbf{u}_2^{(\pm)} \end{bmatrix}$$

soddisfatta dalle seguenti automatrici colonna normalizzate relative all'autovalore $\mu=\omega_0$.

38 $$\mathbf{u}_0^{(+)} = +\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^{(+)} = +\frac{\begin{bmatrix} \omega+\omega_0 \\ c\kappa \end{bmatrix}}{\sqrt{2\omega_0(\omega+\omega_0)}} \qquad\qquad \mathbf{u}_0^{(-)} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^{(-)} = -\frac{\begin{bmatrix} c\kappa \\ \omega+\omega_0 \end{bmatrix}}{\sqrt{2\omega_0(\omega+\omega_0)}}$$

Come già considerato, affinché la condizione di autocoerenza generale 22 sia *lineare* le soluzioni sovrapposte devono risultare *degeneri*. L'espressione 26 dell'autovalore $\mu=\omega_0$ verrà perciò detta *condizione di linearità*,

---

([37]) La matrice colonna $\mathbf{u}^\dagger$ è la coniugata *iperbolica* di **u**.

([38]) Si osservi che l'ordinamento espresso dalla variabile ***z*** (continua) è alquanto differente da quello che esprime l'indice *t* (discontinuo), anche perché – come i numeri complessi circolari – i numeri complessi iperbolici non godono dell'ordinamento dei numeri reali.

([39]) Nel contesto del continuo è *indifferente* introdurre le matrici γ 24 nell'operatore o nella fase dell'esponenziale complesso, come si può notare confrontando la 36 con la seguente (e tenendo presente la 37).

$$\partial\psi = \left(\gamma_0\frac{\partial}{\partial t} + c\gamma_1\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{u}^{(\pm)}\exp[\pm e(\omega t - \kappa x)] = \pm e w \mathbf{u}^{(\pm)}\exp[\pm e(\omega t - \kappa x)] = \pm e\mu\mathbf{u}^{(\pm)}\exp[\pm e(\omega t - \kappa x)] = \pm e\mu\psi$$

Nell'ambito del discreto (in regime *non* arbitrario), invece, solo il secondo approccio porta all'espressione corretta dell'autovalore μ, cioè alla 34 (il valore di μ dato dalla terza espressione 21 *non* è invariante rispetto alla rotazione iperbolica di proiezioni ω e κ).

un vincolo imposto dalla necessità che le condizioni di autocoerenza e di autocompletezza siano *congiuntamente* soddisfatte.

Le fondamentali 35 vengono trasformate nelle armoniche 35 dalla seguente rotazione iperbolica ([40]),

39 $$\mathbf{T}=\frac{\begin{bmatrix}\omega+\omega_0 & c\kappa\\ c\kappa & \omega+\omega_0\end{bmatrix}}{\sqrt{2\omega_0(\omega+\omega_0)}}\exp(\pm e w_\infty z_\infty)=\exp\left(c\frac{\alpha}{2}\right)$$

dove $\boldsymbol{w}_\infty$ e $\boldsymbol{z}_\infty$ sono le seguenti matrici nilpotenti ([41]).

40 $$w_\infty=\begin{bmatrix}\beta\omega & -c\kappa\\ c\kappa & -\beta\omega\end{bmatrix}\quad w_\infty w_\infty^\dagger=w_\infty^2=0\quad z_\infty=\begin{bmatrix}\beta t & -x/c\\ x/c & -\beta t\end{bmatrix}\quad z_\infty z_\infty^\dagger=z_\infty^2=0\quad w_\infty z_\infty=0$$

> Non penso più come un tempo che ci sia una differenza fra scienza e metafisica, e ritengo che una teoria scientifica sia simile a una metafisica; [...] nella misura in cui una teoria metafisica può essere razionalmente criticata sarei disposto a prendere sul serio la sua rivendicazione ad essere considerata vera.
>
> *Karl Popper* (Popper, 1972)

Conclusione

Il formalismo proposto presenta diverse analogie con quello della fisica quantistica relativistica, per mettere in evidenza le quali ne abbiamo preso a prestito la simbologia ([42]). A nostro modo di vedere, se la teoria fisica trova il suo *falsificatore potenziale* nel dato empirico, la teoria meta-fisica

([40]) Il fattore matriciale dell’operatore **T** 39 trasforma le matrici colonna $\mathbf{u}_0$ 38 nelle matrici colonna **u** 38, mentre il suo fattore esponenziale trasforma l’esponenziale fondamentale 35 nell’esponenziale armonico 35. La rotazione iperbolica indotta dall’operatore **T** 39 è consistente con l’aberrazione introdotta dalla 36, che consiste nel *considerare* la rotazione iperbolica della matrice $\boldsymbol{z}$ e *trascurare* quella della matrice $\boldsymbol{w}$ (da cui la fase iperbolica *dimezzata* $\alpha/2$ che compare all’argomento dell’esponenziale complesso iperbolico).

([41]) Essendo $c\kappa=\beta\omega$ e $x/c=\beta t$, nella 39 si ha $\kappa/\beta\omega=1/c=c$ e $x/\beta t=c$. Si ha dunque $\Box\mathbf{T}=0$ (cfr. 21), o meglio $d/d\boldsymbol{z}_\infty\mathbf{T}=0$.

([42]) Per evitare la *banalità ontica* di Ψ dovuta al doppio segno dell’unità immaginaria (cfr. nota 15, seconda parte) in luogo delle due matrici γ 24 è *necessario* utilizzare le quattro matrici γ di Dirac, cioè sostituire il formalismo bidimensionale sin qui sviluppato con la sua estensione quadridimensionale (a differenza di quello bidimensionale, il formalismo quadridimensionale ammette congiunzioni di soluzioni che azzerano il bilancio informativo senza essere antisimmetriche). Tuttavia, per contenere l’esposizione entro limiti ragionevoli, ci siamo limitati al primo.

lo trova invece nella legge fisica. A chi scrive non è dato capire fino a che punto l'isomorfismo individuato – tra la legge *meta*-fisica e la legge fisica – possa ritenersi *autentico* e quanto invece sia stato – più o meno inconsapevolmente – costruito *ad hoc* nel tentativo di conformare la prima alla seconda ([43]). Per toglierci questo dubbio non possiamo che confidare nella *critica severa e puntuale* del Lettore, al quale non chiediamo se la teoria metafisica proposta possa «essere considerata vera» ma, semmai, se è possibile dar conto del fatto che certe equazioni della fisica «sono quelle che sono» in una maniera più *economica* e *generale* di quanto non lo sia quella esposta ([44]). In particolare chiediamo al Lettore di controllare se i presupposti e i passaggi dell'esposizione sono tutti *logicamente necessari*, o se sussistono alternative logicamente preferibili all'ontologia proposta. La questione ci sembra decisiva perché solo in assenza di tali alternative avrebbe senso chiedersi se l'*autoinformazione* può essere considerata come *fondamento ontico* nell'ambito della fisica.

([43]) Il problema che qui si pone è analogo a quello che riguarda qualunque teoria *fisica* che avesse previsto con una certa precisione il *dato empirico* che avrebbe potuto falsificarla: gli assunti da cui procede, e il modo in cui vengono implementati nell'impianto teorico, sono *logicamente necessari* o sono *scelti ad hoc*?

([44]) L'impianto ontologico esposto può ritenersi *economico* nella misura in cui muove – effettivamente? – da *due soli assunti*, che sembrano logicamente poco dispendiosi: 1) l'ente naturale è un *sistema auto consistente*; 2) l'informazione naturale è una *sequenza numerica*. L'evidenza non lascia scorgere né *enti sovrannaturali* che possano *informare* la «Natura» né versioni dell'informazione più *elementari* della sequenza numerica, il ché, ovviamente, non è sufficiente ad escludere né gli uni né le altre.

L'impianto ontologico esposto può invece considerarsi *generale* nella misura in cui non richiede – effettivamente? – *ulteriori assunzioni*, in ordine alle quali perderebbe inevitabilmente in generalità. Naturalmente, per quanto un impianto teorico tenti di smarcarsi da assunti che potrebbero pregiudicarne la generalità, si porta inevitabilmente appresso il paradigma entro il quale viene formulato e proposto. Se nell'epoca delle macchine a vapore era "naturale" rappresentare la «Natura» in termini *meccanico-termodinamici*, nell'era dei calcolatori elettronici sembra altrettanto "naturale" farlo in termini *informatici*. Ciò considerato, il peso del pregiudizio storico sembra difficilmente sopravvalutabile.

Bibliografia

Barone V., 2004 - *Relatività*, Bollati Boringhieri, Torino.

Barone V. & Giorello G., 2016 - *La matematica della natura*, Il Mulino, Bologna.

Bell J.S., 2010 - *Dicibile e indicibile in meccanica quantistica*, Adelphi, Milano.

Boniolo G., 1997 - *Filosofia della fisica*, Mondadori, Milano.

Dapor M., 2008 - *Teoria della relatività*, Zanichelli, Bologna.

Dapor M., 2011 - *Relatività e meccanica quantistica relativistica*, Carocci, Roma.

Dirac P.A.M., 1976 - *I principi della meccanica quantistica*, Bollati Boringhieri, Torino.

Dirac P.A.M., 2013 - *La bellezza come metodo*, Indiana, Milano.

Dorato M., 2013 - *Che cos'è il tempo?*, Carocci, Roma.

Einstein A., 2014 - *Pensieri degli anni difficili*, Bollati Boringhieri, Torino.

Heisenberg K.W., 2013 - *Fisica e filosofia*, Il saggiatore, Milano.

Maiani L. & Benhar O., 2012 - *Meccanica quantistica relativistica*, Editori Riuniti, Roma.

Penrose R., 2005 - *La strada che porta alla realtà*, B.U.R., Milano.

Popper K., 1972 - *Congetture e confutazioni*, Il Mulino, Bologna.

Schrödinger E., 1995 - *Che cos'è la vita ?* Adelphi, Milano.

Shannon C.E., 1948 - A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*.

Smolin L., 2007 - *L'universo senza stringhe*, Einaudi, Torino.

Smolin L., 2014 - *La rinascita del tempo*, Einaudi, Torino.

Zellini P., 2016 - *La matematica degli dèi egli algoritmi degli uomini*, Adelphi, Milano.

Francesco Prandel, franz.prandel@gmail.com.