Achille C. Varzi

CONFIGURAZIONI, REGOLE E INFERENZE (*)

Abstract - Varzi A.C., 2012 - Patterns, Rules, and Inferences.

Atti Acc. Rov. Agiati, a. 262, 2012, ser. IX, vol. II, B: 5-24.

The «Game of the Rule» is easy enough: I give you the beginning of a sequence of numbers (say) and you have to figure out how the sequence continues, to uncover the rule by means of which the sequence is generated. The game depends on two obvious constraints, namely (1) that the initial segment uniquely identify the sequence, and (2) that the sequence be non-random. As it turns out, neither constraint can fully be met, among other reasons because the relevant notion of randomness is either vacuous or undecidable. This may not be a problem when we play for fun. It is, however, a serious problem when it comes to playing the game for real, i.e., when the player to issue the initial segment is not one of us but the world out there, the sequence consisting not of numbers (say) but of the events that make up our history. Moreover, when we play for fun we know exactly what initial segment to focus on, but when we play for real we don't even know that. This is the core difficulty in the philosophy of the inductive sciences.

Key words - Patterns, Rule, Inductive reasoning.

Riassunto - Varzi A.C., 2012 - Configurazioni, regole e inferenze.

Il «gioco della regola» è piuttosto facile: un giocatore dà l'inizio di una sequenza di numeri (per esempio) e l'altro deve capire come continua la sequenza, scoprire la regola per mezzo della quale è generata. Il gioco dipende però da due vincoli importanti, cioè (1) che il segmento iniziale identifichi la sequenza in modo univoco, e (2) che la sequenza sia non-casuale. Purtroppo nessuno dei due vincoli può essere pienamente soddisfatto, anche perché la nozione di casualità risulta o vuota o indecidibile. Questo può non essere un problema quando si gioca per divertimento. Il problema, tuttavia, diventa aspro quando si tratta di giocare sul serio, cioè quando il giocatore che rilascia il segmento iniziale non è uno di noi ma è il mondo esterno, e la sequenza

---

(*) Versione originale: Patterns, Rules, and Inferences, in Jonhatan E. Adler and Lance J. Rips (eds.) *Reasoning: Studies of Human Inference and its Foundations*, Cambridge: Cambridge University Press, 2008, pp. 282-290, traduzione a cura di Maurizio Dapor.

è formata non da numeri ma dagli eventi che costituiscono la nostra storia. Inoltre, quando si gioca per divertimento sappiamo esattamente su quale segmento iniziale dobbiamo concentrarci, ma quando giochiamo col mondo non sappiamo nemmeno quello. È questa, a ben vedere, la difficoltà principale nella filosofia delle scienze induttive.

PAROLE CHIAVE - Configurazione, Regola, Ragionamento induttivo.

1. INTRODUZIONE

Alcune parti del nostro ragionare sono strettamente *deduttive*: l'evidenza di cui si dispone consente di pervenire a una determinata conclusione con assoluta certezza. Per esempio, il seguente ragionamento è deduttivo, giacché non è possibile che la conclusione sia falsa se entrambe le premesse sono vere.

(1) Ogni *F* è *G*, e *x* è *F*. Pertanto, *x* è *G*.

Spesso, tuttavia, non siamo nella posizione di produrre un argomento deduttivo; possiamo solo determinare che l'evidenza supporta la conclusione con un elevato grado di probabilità. In tal caso si parla di ragionamento *induttivo*, che a sua volta è suddivisibile in due tipologie differenti a seconda che si presuma o meno che l'universo, o un suo aspetto rilevante, sia governato da leggi o regole. I ragionamenti che non richiedono questo presupposto sono classificati come *statistici*, dato che l'evidenza descritta dalle premesse supporta la probabilità della conclusione per ragioni strettamente matematiche. Per esempio, il seguente ragionamento induttivo è statistico:

(2) Quasi ogni *F* è *G*, e *x* è *F*. Pertanto, *x* è *G*.

Qui è ragionevole raggiungere la conclusione anche se questa non segue per necessità logica, poiché la probabilità che x sia G è, dati i fatti (e a parità di condizioni), molto maggiore della probabilità che x non sia G. Il secondo tipo di ragionamento induttivo è generalmente classificato come humiano, dal nome del filosofo che per primo lo studiò in modo esaustivo, e corrisponde a quelle argomentazioni che dipendono dal presupposto che l'universo sia regolato da leggi. Ecco un esempio:

(3) Ogni *F* sinora osservato era *G*, e *x* (che stiamo osservando) è *F*. Pertanto, *x* è *G*.

Anche in questo caso la conclusione non segue per necessità logica, cosicché l'argomento non è deduttivo. Tuttavia l'evidenza disponibile

fornisce eccellenti ragioni per credere nella verità della conclusione piuttosto che nella sua falsità. A meno che la relazione tra essere *F* e essere *G* sia del tutto casuale, l'evidenza suggerisce con una certa forza l'esistenza di una legge secondo la quale *ogni F* è *G*.

Le argomentazioni humiane sono di grande utilità pratica, perché spesso abbiamo la necessità di raggiungere conclusioni e prendere decisioni sulla base di dati che non sono né conclusivi (come richiesto dal ragionamento deduttivo) né completi (come richiesto dal ragionamento induttivo di tipo statistico). Il presupposto di un universo regolato da leggi, tuttavia, è tanto cruciale quanto controverso, e coglierne esattamente la portata non è semplice.

2. Il gioco della regola

Consideriamo il gioco seguente. X pensa a una certa sequenza (per esempio, una successione di numeri) e Y deve indovinare di quale sequenza si tratti. Per cominciare, X fornisce un segmento iniziale della sequenza. Y deve osservare questo segmento attentamente e, sulla base di quanto vede, tentare di indovinare come prosegua la sequenza. In altri termini, Y deve capire quale sia la configurazione soggiacente, scoprire la regola che determina lo sviluppo dell'intera sequenza (potenzialmente infinita).

A titolo esemplificativo, supponiamo che si tratti di sequenze numeriche (infinite). Se il segmento iniziale proposto da X fosse:

(A) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …

è probabile che Y arriverebbe senza molte esitazioni alla seguente ipotesi: la sequenza deve essere costituita dagli interi dispari positivi, nel loro ordine naturale. Analogamente, se la sequenza originale fosse:

(B) 1, 2, 3, 5, 7, 11, …

allora Y potrebbe facilmente indovinarne il seguito, e quindi la regola per mezzo della quale la sequenza è generata: si tratta della sequenza ordinata dei numeri primi, cioè degli interi positivi che non hanno altri divisori interi eccetto 1 e se stessi. Se Y indovina la regola nel tempo concesso, vince il gioco. Altrimenti vince X.

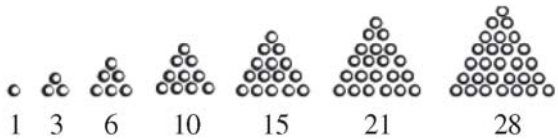
Ora, naturalmente alcuni casi sono più difficili di altri, ed è qui che il gioco si fa interessante. Consideriamo, per esempio, il segmento:

(C) 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …

si tratta dell'inizio della sequenza dei cosiddetti numeri triangolari, cioè quei numeri che sono uguali a una somma di interi consecutivi, partendo da 1. Più precisamente, la regola che soggiace a questa sequenza è quella secondo la quale l'n-esimo elemento, S_n, è la somma dei primi n interi positivi:

(C*) $$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

(per esempio, il quarto numero triangolare è $10 = 1 + 2 + 3 + 4$). Sarebbe interessante fare qualche test sperimentale per vedere come la gente si comporta davvero, ma c'è da aspettarsi che in questo terzo caso Y dovrà pensarci un po' più a lungo prima di trovare la soluzione. Y potrebbe perfino obiettare di non aver mai sentito parlare di numeri triangolari, mentre aveva sentito parlare di interi pari e di interi primi; come si può pretendere che individui la regola? Dinanzi a quest'obiezione, però, X potrebbe semplicemente rispondere che non è necessario *sapere* cosa sia un numero triangolare per riconoscere la configurazione in esame: con un po' di pazienza, Y potrebbe *comunque* capire che la sequenza obbedisce alla regola definita in (C*). Oppure potrebbe scoprire la regola sotto una descrizione differente e più intuitiva. Per esempio, Y potrebbe rendersi conto che i numeri della sequenza corrispondono ai diversi modi in cui si può costruire una configurazione di punti, di birilli, o di palle da biliardo, come nel diagramma seguente:



In tal modo Y potrebbe descrivere la sequenza nei termini di questa intuizione:

(C**) S_n = il numero di punti (birilli, palle) che sono necessari per formare una configurazione triangolare equilatera di lato n, posto $S_1 = 1$

(questa è realmente la ragione per cui questi numeri sono chiamati *triangolari*, in analogia con i numeri *quadrati*, che corrispondono ai differenti modi con cui possiamo costruire una configurazione quadrata di punti). Come una persona riesca a individuare la regola e come la descriva – X potrebbe insistere – non è importante per vincere il gioco. È importante soltanto in senso derivato, cioè in quanto rende il gioco indipendente dai background culturali dei giocatori. Il gioco è

interessante proprio perché il processo mentale che conduce alla scoperta della regola può coinvolgere processi cognitivi diversi da un giocatore all'altro.

In effetti, è degno di nota che sebbene in questi esempi la regola che genera la sequenza è determinata essenzialmente dalle sue proprietà numerico-teoriche, non è detto che debba essere così in generale, anche se la sequenza consiste di numeri. Per esempio, supponiamo che X offra il seguente segmento:

(D) $$1, 22, 333, 4444, 55555, \ldots$$

Questo è l'inizio di una sequenza ovvia, ed esiste una chiave matematica ben precisa che ne coglie lo sviluppo, corrispondente all'equazione:

(D*) $$S_n = n\,(10^n - 1)/9$$

Ma naturalmente è più probabile che Y descriva la sequenza sulla base di un criterio differente, che legge la regola direttamente dalla configurazione visiva esibita dai suoi elementi:

1	Un 1
22	Due 2
333	Tre 3
4444	Quattro 4
55555	Cinque 5
⋮	⋮

In tal caso, la regola di Y non sarebbe la (D*) ma piuttosto qualcosa del tipo:

(D**) S_n = la stringa consistente nel numero n ripetuto n volte.

Lo stesso X, nel proporre il segmento iniziale (D), potrebbe aver pensato alla sequenza in termini di (D**), anziché di (D*), cosicché il fatto che esista una descrizione numerico-teorica di questa sequenza è del tutto irrilevante. E in alcuni casi non c'è descrizione numerico-teorica che tenga, come in:

(E) $$1, 2, 6, 7, 8, 9, 15, 18, 20, 22, \ldots$$

Qui X potrebbe avere in mente una regola definita con riferimento a una proprietà linguistica e che riguarda i numerali, non i numeri:

(E*) S_n = l'n-esimo intero positivo il cui nome in italiano contiene un numero pari di vocali.

Un esempio classico, in questo genere di sequenze, è quello del matematico americano John Conway, che non dipende né da considerazioni puramente linguistiche, né da considerazioni strettamente aritmetiche [1]:

(F) 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, …

C'è una regola dietro questa sequenza? Se ne cerchiamo una puramente aritmetica o linguistica, non la troveremo. Dobbiamo guardare alla sequenza da una diversa prospettiva. Quale sia la prospettiva giusta è, naturalmente, difficile da dire. Ma se iniziamo a leggere la sequenza ad alta voce, possiamo ottenere un indizio. Non leggiamola così:

1	Uno
11	Undici
21	Ventuno
1211	Milleduecentoundici
111221	Centoundicimila duecentoventuno
312211	Trecentododicimila duecentoundici
13112221	Tredici milioni centododicimila duecentoventuno
⋮	⋮

leggiamola così:

1	1
11	Un 1
21	Due 1
1211	Un 2 e un 1
111221	Un 1, un 2 e due 1
312211	Tre 1, due 2 e un 1
13112221	Un 3, un 1, due 2 e due 1
⋮	⋮

Allora ci rendiamo conto immediatamente di che cosa stia succedendo: si tratta di una sequenza «auto-descrivente». Inizia con 1 e poi prosegue descrivendo se stessa, nel senso che ogni termine successivo fornisce una descrizione «audio-attiva» del suo predecessore. La regola può allora essere quella che segue, dove «$c_i|r_i$» designa la stringa ottenuta ripetendo r_i volte la cifra c_i:

---

[1] J.H. Conway, *The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay*, «Eureka», 46 (1986), pp. 5-16.

(F*) Se S_n è la stringa $c_1|r_1 \ldots c_k|r_k$ ($c_i \neq c_{i+1}$ per ogni $i < k$), allora S_{n+1} è la stringa $r_1c_1 \ldots r_kc_k$ iniziando con $S_1 = 1$

3. LE REGOLE DEL GIOCO

Tanto basti per questo gioco familiare. Basta solo un momento, ora, per rendersi conto che il gioco è un buon modello di quanto succede quando ci cimentiamo in un ragionamento induttivo di tipo humiano. Perché il gioco della regola è familiare non solo in quanto è spesso praticato per divertimento, o per scopi pedagogici (gli insegnanti delle scuole elementari fanno sovente affidamento su di esso per spiegare, per esempio, certi basilari concetti aritmetici ed operazioni): è familiare anche perché ci troviamo a praticarlo in continuazione nelle nostre quotidiane interazioni con il mondo esterno. Siamo costantemente alla ricerca delle regole o leggi che governano il mondo naturale, la società, o il mercato. Guardiamo ai fatti e tentiamo di scoprire quali siano le configurazioni soggiacenti in modo da predire che cosa accadrà dopo, esattamente come tentiamo di scoprire la configurazione di una sequenza di numeri sulla base di un segmento iniziale. Guardiamo alla nostra storia sino ad ora – questo è il segmento iniziale – e cerchiamo di estrarne il razionale sottostante, in modo da sapere che cosa ci aspetta nel futuro. Può suonare metaforico, ma non sarebbe un'esagerazione affermare che l'intera scienza è impegnata in un gioco di questo tipo. Ogni *F* osservato finora è *G* (come ogni numero nella porzione visibile della sequenza è primo, per esempio) e pensiamo che debba sussistere un nesso legiforme tra essere *F* e essere *G*: pensiamo che essere *F* vada di pari passo con essere *G* e concludiamo che anche il prossimo *F* nella sequenza debba essere *G*. Questa è precisamente l'idea su cui riposa il ragionamento induttivo humiano. E ci sono ricercatori che dichiarerebbero che essere capaci di ragionare in questo modo – di cimentarsi in un gioco così – sia un tratto distintivo del comportamento razionale. Douglas Hofstadter e il suo gruppo di ricerca, per esempio, credono che questo tratto sia vicino al nucleo – se non che *sia il* nucleo – dell'intelligenza umana, e che progettare programmi per computer in grado di giocare al gioco della regola costituisca la sfida più profonda e affascinante che la cosiddetta «intelligenza artificiale» deve affrontare (2).

(2) Il punto di vista di Hofstadter e alcuni risultati preliminari sono documentati nel suo libro *Fluid Concepts and Creative Analogies*, Basic Books, New York, 1995; tr. it. di M. CORBÒ, I. GIBERTI & M. CODOGNO: *Concetti fluidi e analogie creative*, Adelphi, Milano, 1996.

Per apprezzare pienamente la portata di queste dichiarazioni, tuttavia, è importante essere espliciti attorno ad alcuni aspetti che abbiamo sinora dato per scontati. Ci sono, infatti, due importanti assunzioni implicite che devono essere soddisfatte affinché il gioco possa svolgersi correttamente – due tacite Regole (con la 'R' maiuscola) che i giocatori devono osservare.

La prima Regola tacita è che il segmento iniziale mediante il quale X introduce la sequenza dovrebbe fornire informazioni sufficienti perché Y possa scoprire la soluzione. Per esempio, se X ha in mente la serie di Conway, non può limitarsi a fornire il segmento:

(G) 1, 11, …

al posto di (F), perché questo inizio è compatibile con molte altre soluzioni, alcune delle quali ben più plausibili. La sequenza potrebbe infatti proseguire in svariati modi, ciascuno dei quali corrisponde a una differente soluzione che «si adatta ai dati» altrettanto bene nella misura in cui i dati sono stabiliti da (G). Per esempio, potrebbe continuare in ciascuno dei tre modi seguenti:

(G_a) 1, 11, 121, 1331, 14641, 161051, …
(G_b) 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111, …
(G_c) 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1, 11, 1, 11, …

e ogni modo corrisponderebbe a una regola completamente differente:

(Ga*) $S_n = 11^{(n-1)}$
(Gb*) $S_n = 1|n$
(Gc*) $S_n = 1$ se n è dispari e $S_n = 11$ se n è pari.

Ci sono ovviamente tantissime possibilità, e per questa ragione Y avrebbe il diritto di lamentarsi se X le desse come solo indizio l'informazione contenuta in (G). Perché il problema non è soltanto che si possono dare risposte diverse: abbiamo già visto che qualche volta la stessa sequenza può essere generata o descritta in conformità a più di una regola, come per (D*) e (D**). Il problema è che nel caso in esame le diverse risposte non sarebbero equivalenti: descriverebbero sequenze differenti, non la stessa sequenza in modi differenti.

Questa dunque è la prima Regola del gioco, che possiamo formulare approssimativamente come segue:

R1 *Il segmento iniziale deve identificare la sequenza in modo univoco.*

La questione interessante, naturalmente, è se questa Regola possa essere implementata con successo, o anche solo se possa essere imple-

mentata in qualche modo. Torneremo su questa questione fra breve. Prima vediamo qual è la seconda Regola tacita, che è altrettanto importante. Questa seconda Regola dice che la sequenza in questione non può essere una sequenza *casuale*. Per esempio, sarebbe strano se X asserisse che la sequenza in (G) continua così:

(G_d) 1, 11, 3, 4, 5, 10, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 12, …

Sarebbe strano perché questa sequenza appare proseguire in un modo totalmente arbitrario: non sembra esservi alcun modo per sussumerla sotto una qualche legge, e quindi alcun modo per Y – o per chiunque altro – di descrivere la sequenza, salvo elencare uno dopo l'altro ogni termine che la compone. Per la stessa ragione, naturalmente, sarebbe strano se Y insistesse nel dire che (G_d) è sullo stesso piano di (G_a)–(G_c). Perché (G_a)–(G_c) esibiscono una configurazione, o così sembra, mentre (G_d) no. In prima approssimazione, quindi, la seconda Regola del gioco può essere formulata come segue:

R2 *La sequenza non deve essere casuale,*
cioè deve essere riconducibile a una regola.

In un certo senso, R2 segue da R1. Perché se una sequenza fosse casuale, *nessun* segmento iniziale potrebbe identificarla in modo univoco. Quindi, per contrapposizione, se esiste un segmento iniziale che identifica tutta la sequenza in modo univoco, in accordo con R1, la sequenza non può essere casuale. In effetti è proprio così che si è soliti definire la casualità, almeno a partire dai lavori pionieristici di Ray Solomonoff, Andrei Kolmogorov e Gregory Chaitin della metà degli anni 1960: una sequenza è casuale se non vi è modo più efficace di descriverla che elencarla nella sua interezza ([3]). Tuttavia, come abbiamo osservato, non è detto che R1 sia del tutto a posto nei termini in cui l'abbiamo formulata, per cui è conveniente enunciare R2 in modo indipendente. E anche a riguardo di quest'ultima regola torneremo fra breve sull'importante questione della sua implementabilità, o se possa essere data per scontata. Al momento il punto è semplicemente che R1 e R2 vengono assunte in modo implicito ogniqualvolta due giocatori si cimentano in un gioco

([3]) I lavori classici sono: R. J. SOLOMONOFF, *A Formal Theory of Inductive Inference. Part I*, «Information and Control», 7 (1964), pp. 224-254; A. KOLMOGOROV, *Three Approaches to the Quantitative Definition of Information*, «Problems of Information Transmission», 1 (1965), pp. 1-17; G.J. CHAITIN, *On the Length of Programs for Computing Finite Binary Sequences: Statistical Considerations*, «Journal of the ACM», 16 (1969), pp. 145-159.

del tipo che stiamo considerando, perché altrimenti sarebbe impossibile indovinare la sequenza.

4. Troppo bello per essere vero

Veniamo dunque al punto: R1 e R2 sono a posto così? Purtroppo no, non del tutto. Iniziamo con R1. A un esame più attento, questa Regola risulta essere tanto cruciale quanto insoddisfacibile, per quanto possa suonare irritante per i partecipanti al gioco. Cominceremo illustrando questo risultato negativo con riferimento ai casi considerati finora; vedremo in seguito come passare al caso generale.

Consideriamo ancora l'esempio con cui abbiamo iniziato, la sequenza corrispondente al segmento:

(A) $$1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$$

Non c'è dubbio che riusciamo tutti a vedere l'ovvia configurazione: i numeri dispari. Ma come facciamo a sapere che proprio quella è *la* configurazione? Come fa Y a sapere che X aveva in mente proprio la sequenza dei numeri dispari? Non può saperlo. Y vede che ogni numero in (A) è dispari, e vede che nessun numero dispari è assente, e poiché sta assumendo che questo segmento iniziale caratterizzi l'intera sequenza in modo univoco, conclude che i puntini vadano riempiti con i numeri dispari rimanenti. In altre parole, Y conclude che la regola soggiacente deve essere:

(A*) $$S_n = 2n-1.$$

In senso stretto, tuttavia, Y non *sa* che questa è la regola più di quanto conoscere la verità di una qualunque generalizzazione basata su una quantità limitata di dati. La generalizzazione in (A*) è giustificata solo se si assume che R1 è pienamente soddisfatta. E come si fa ad assumere una cosa del genere? Come può il segmento iniziale per mezzo del quale X ha introdotto la sequenza fornire *informazioni sufficienti* affinché qualcuno possa scoprire la soluzione e continuare la sequenza riempendo opportunamente i puntini? Come scriveva Wittgenstein, «da dove spunta l'idea secondo cui l'inizio di una serie è un tratto visibile di un binario che si prolunga invisibilmente all'infinito?» [4].

---

[4] L. Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen*, a cura di G.E.M. Anscombe & R. Rhees, Basil Blackwell, Oxford, 1953; trad. it. a cura di R. Piovesan & M. Trinchero: *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino, 1967, § 218.

Supponiamo che Y dica che la sequenza in questione consista dei numeri dispari e X risponda: «No, mi dispiace. La sequenza consiste delle cifre dispari ripetute una volta, quindi ripetute due volte, quindi ripetute tre volte, e così via. Ecco come sarebbe apparsa se avessi continuato per un altro po':

(A') 1, 3, 5, 7, 9, 11, 33, 55, 77, 99, 111, …

Se desideri che sia più preciso, posso perfino esprimere la regola in termini matematici:

(A**) $S_n = 2n–1$ *mod* 10, ripetuto ($2n$ *div* 10) + 1 volte,

dove *mod* è la funzione che restituisce il resto della divisione (del primo argomento per il secondo) e *div* la funzione che restituisce la divisione senza resto». Y avrebbe diritto di lamentarsi?

In un certo senso sì: se *quella* è la regola che X aveva in mente, allora X non ha rispettato R1 perché (A) non costituisce un segmento identificato in modo univoco. In particolare, non identifica univocamente la sequenza descritta in (A**), perché i puntini possono essere riempiti in conformità a quella regola così come alla regola suggerita da Y, (A*). Naturalmente questo significa anche che (A) non identifica in modo univoco la sequenza dei numeri dispari, cosicché la lamentela di Y è auto-lesiva. Ma non preoccupiamoci di questo. È un fatto che in relazione ad (A**) – la regola che X aveva in mente e che Y avrebbe dovuto scoprire – il segmento (A) non è sufficientemente informativo, proprio come il breve segmento in (G) non sarebbe stato abbastanza informativo per identificare la regola della sequenza di Conway, (F*). Quindi la lamentela di Y è perfettamente legittima.

D'altra parte, che cosa può farsene X di questa lamentela? C'è forse un modo per identificare univocamente la regola che aveva in mente attraverso un opportuno segmento iniziale? Supponiamo che X fornisca il segmento più lungo, (A'), al posto di (A). Sarebbe sufficiente? No. Sarebbe abbastanza per escludere l'ipotesi che la sequenza consista degli interi dispari, ma molte altre sequenze sarebbero ancora compatibili con quel segmento iniziale. La sequenza potrebbe continuare in conformità alla configurazione che X aveva effettivamente in mente, ma potrebbe anche proseguire in accordo con una configurazione differente. Per esempio, potrebbe consistere dei dispari palindromi perfetti, cioè quei numeri che consistono esclusivamente di cifre dispari e che restano gli stessi se scritti in avanti oppure all'indietro. Tutti i numeri in (A') sono dispari palindromi perfetti. Ma mentre la sequenza di X continuerebbe così:

(A'_a) …, 333, 555, 777, 999, 1111, …

il resto della sequenza dei dispari palindromi conterrebbe anche degli elementi intermedi:

(A'_b) …, 131, 151, 171, 191, 313, 333, …

A questo punto è evidente che perfino (A'_a) sarebbe un input ambiguo per scoprire la regola di X, perché si possono ancora pensare modi differenti per continuare la serie. Più si va avanti – più si allunga il segmento iniziale – più le alternative possono apparire convolute e, in qualche modo, «innaturali». Ma proprio questo è il punto. Non è R1 a imporre un vincolo sul gioco, perché di per sé R1 non può *mai* essere soddisfatta: ogni segmento finito può proseguire in un'infinità di modi diversi, proprio come qualunque tratto di inchiostro su un foglio di carta può essere prolungato in un'infinità di modi. Piuttosto, il vincolo deriva da R1 unitamente al presupposto aggiuntivo che la sequenza in questione sia una sequenza «naturale». E purtroppo è un fatto che ciò che sembra «naturale» a X potrebbe non sembrare «naturale» a Y, e viceversa.

Basta un momento adesso per capire quanto tutto questo sia importante quando si gioca sul serio, cioè quando il giocatore X che propone il segmento iniziale non è qualcuno come noi ma il mondo stesso. Una sequenza di eventi osservati può suggerire una certa configurazione e noi – giocando nel ruolo di Y – finiamo col convincerci che quella configurazione corrisponda a una legge di natura. Ma questo non equivale a dire che gli eventi osservati identificano quella legge in modo univoco. E se il prossimo evento osservato non è quello che ci aspettavamo, non possiamo lamentarci e accusare la natura di essere «innaturale». Dobbiamo semplicemente ammettere che ci eravamo sbagliati e imparare a convivere con la possibilità che anche la nostra prossima predizione non vada a segno. Proprio questo è il limite delle nostre pratiche induttive, quando non sono meramente statistiche ma humiane in senso stretto ([5]).

Diamo ora uno sguardo alla nostra seconda meta-Regola, R2. In effetti si potrebbe pensare che sia proprio a questo punto che entra in ballo R2. Questa seconda Regola afferma che la sequenza da indovinare

---

([5]) D. Hume, *Ricerca sull'intelletto umano*, Sez. IV. La connessione tra il punto di vista di Wittgenstein sul seguire la regola e lo scetticismo di Hume è stata esplicitata da S.A. Kripke nel suo libro, *Wittgenstein on Rules and Private Language*, Harvard University Press, Cambridge (MA), 1982; trad. it di Marco Santambrogio: *Wittgenstein su regole e linguaggio privato*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000.

non deve essere casuale, cioè deve essere governata da una legge. E stando a quanto si è detto sinora, il fatto che ogni segmento iniziale possa essere continuato in molti modi diversi non significa che possa essere continuato in molti modi *legiformi*, cioè corrispondenti a una regola. È effettivamente così nel caso di (A), come anche nel caso del segmento più lungo in (A'). Ma forse potrebbe esserci un segmento ancora più lungo tale da ammettere *solo una* estensione legiforme. Se così fosse, allora l'impasse in cui ci siamo imbattuti in relazione a R1 potrebbe dissolversi non appena entra in gioco R2: potrebbe esserci un segmento iniziale (sufficientemente esteso) che identifica una sequenza in modo univoco in considerazione del fatto che ogni altro modo per continuare la sequenza potrebbe risultare casuale, quindi inaccettabile in virtù di R2. In effetti è esattamente questo il ruolo che si intendeva assegnare alla seconda Regola: avevamo detto che R2 segue da R1, ma ora vediamo che R1 risulta vuota a meno di non aggiungere qualche vincolo supplementare, e R2 ci dà proprio questo.

Sfortunatamente, R2 si rivela tanto inutile quanto R1. Ci sono due modi per stabilire questo punto. Il primo risale almeno a Leibniz, il quale nei *Discorso di metafisica* si chiese se e come si possa discriminare un mondo a cui si applichi la scienza da uno a cui non si applichi (6). Immaginiamo – osservava Leibniz – che qualcuno produca in modo del tutto arbitrario delle macchie di inchiostro su un foglio di carta («come coloro che esercitano la ridicola arte della Geomanzia»). Indipendentemente dalla particolare configurazione ottenuta, Leibniz dichiarò che ci sarà sempre una funzione continua il cui grafo passa per quell'insieme finito di punti, una «linea geometrica il cui concetto sarà uniforme e costante, cioè in accordo con una certa formula». Per quanto possiamo dire, l'esistenza di tale funzione fu puramente congetturata da Leibniz, ma oggi sappiamo che egli aveva assolutamente ragione. Oggi conosciamo diversi metodi per costruire una funzione che si comporti esattamente nel modo indicato. Un buon esempio è rappresentato dalla cosiddetta interpolazione polinomiale di Lagrange (7). È il genere di funzione di cui si servono buona parte dei programmi di grafica per computer: si clicca con il mouse su ogni punto, e la funzione restituisce una curva normalizzata che li collega tutti, come nella figura:

---

(6) G.W. LEIBNIZ, *Discorso di metafisica*, Sez. VI.

(7) Si veda, per esempio, H. JEFFREYS & B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1983, §9.011. (Il nome viene dal matematico Italiano Joseph-Louis Lagrange, che scoprì il metodo oltre un secolo dopo la congettura di Leibniz).

macchie d'inchiostro

curva di Lagrange

Ora, se ammettiamo che l'esistenza di un'opportuna funzione sia un'indicazione del fatto che la configurazione non è casuale, allora ne segue che nessuna configurazione di questo tipo è casuale. E siccome è plausibile supporre che ogni sequenza finita possa essere rappresentata da una corrispondente configurazione di macchie d'inchiostro, ne segue che *nessuna* sequenza finita qualsivoglia è casuale. Ecco dunque il problema: cimentandosi nel gioco della regola, X non sarà mai nelle condizioni di fornire un segmento iniziale che sia «sufficientemente esteso» da ammettere un'unica estensione legiforme. *Ogni* estensione finita di *qualsiasi* segmento iniziale, indipendentemente dalla sua lunghezza, sarà non-casuale. Il che equivale a dire che R2 non impone alcuna restrizione del tipo desiderato, lasciando R1 nella pattumiera.

Il secondo modo per stabilire questo punto è il seguente. Supponiamo di basarci su una definizione più austera di casualità. Per esempio, supponiamo di aderire alla definizione di casualità menzionata sopra, che è oggi ampiamente accettata: una sequenza è casuale se (e solo se) non vi è modo più efficace di descriverla che elencandone tutti gli elementi. In altre parole, per quanto ogni sequenza possa essere descritta da *qualche* funzione – come notato da Leibniz – in alcuni casi la funzione in questione è troppo complessa per essere efficace, e possiamo considerare questa circostanza come un segno di casualità. Se aderiamo a questa definizione, allora possiamo essere certi che ci siano sequenze casuali, e quindi il problema summenzionato non sorge. Questo è ovvio nel caso delle sequenze infinite, dal momento che il loro numero totale non è denumerabile, mentre le descrizioni finite (ed efficienti) sono in numero denumerabile. Ma è facile dimostrare che esiste anche un'infinità di sequenze casuali di lunghezza finita, almeno se il linguaggio in cui le sequenze sono codificate è lo stesso linguaggio che si usa per descriverle. (Indipendentemente dall'alfabeto, il numero delle sequenze consistenti di n simboli è sempre più grande del numero di tutte le sequenze consistenti di un numero minore di simboli, quindi più grande del numero di tutte le descrizioni di lunghezza inferiore a n ([8])). Problema risolto?

([8]) Se l'alfabeto contiene $k > 1$ simboli, il numero di tutte le sequenza consistenti di n simboli dell'alfabeto è k^n, che è maggiore di $k^1 + k^2 + \ldots + k^{n-1}$ per ogni $n \geq 1$.

Sfortunatamente no. Il problema non è che questa definizione più austera di casualità dipende dalla nozione di descrizione «efficiente», che appare piuttosto vaga. Potremmo renderla più precisa. Piuttosto, il problema è che questa nozione più austera di casualità risulta *indecidibile*. Si può cioè dimostrare che non esiste alcuna procedura di decisione effettiva (intuitivamente: nessuna procedura che possa essere implementata su un programma per computer) in grado di restituire sempre una risposta definita a ogni domanda della forma: questa è una sequenza casuale? ([9]). Qualche volta possiamo ottenere una risposta negativa. La sequenza dei numeri dispari, per esempio, o perfino un suo segmento iniziale finito ragionevolmente esteso, non è casuale perché possiamo descriverlo in maniera efficiente per mezzo di una regola come la (A*). Lo stesso vale per la sequenza dei numeri dispari ripetuti, per quella dei numeri dispari palindromi, e per molte altre sequenze considerate sopra. Tuttavia, *in generale* possiamo non trovarci in condizione di determinare se una data sequenza (finita o infinita) sia casuale. Tutto quello che possiamo dire, se non riusciamo a individuare la regola corrispondente, è che la sequenza è casuale *al meglio della nostra conoscenza*, e questo non è abbastanza. Per esempio, a un primo sguardo il segmento iniziale della sequenza di Conway *sembra* decisamente casuale:

(F) 1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, …

Y potrebbe aver tentato di trovare un algoritmo per descriverla a potrebbe aver fallito. Quindi Y potrebbe essere incline a concludere che il segmento *sia* l'inizio di una sequenza casuale. In realtà sappiamo che non lo è. Analogamente per (G_d): abbiamo detto che la serie

(G_d) 1, 11, 3, 4, 5, 10, 7, 8, 9, 9, 10, 12, 12, …

sembra casuale, ma chi lo sa, c'è sempre la possibilità che qualcuno riesca a trovare un modo efficace per descriverla. Questo è particolarmente pressante in vista del fatto che ci sono molti modi per descrivere una sequenza: come abbiamo visto, la descrizione non deve necessariamente essere numerico-teorica, e non è detto che il suo formato debba essere quello che ci sembra più naturale. Proprio questa è la lezione della

---

Naturalmente, se permettiamo solo certe sequenze, cioè se le sequenze sono codificate in un linguaggio (i numerali, diciamo) con un minor potere espressivo del linguaggio disponibile per descriverle (l'italiano, diciamo, più il linguaggio della teoria dei numeri), allora il risultato può non essere valido.

([9]) Si veda, per esempio, G.J. CHAITIN, *Information, Randomness and Incompleteness*, World Scientific, Singapore, 1987.

sequenza di Conway. (In effetti, ripensandoci, anche (G_d) potrebbe essere l'inizio di una sequenza non-casuale. La regola:

(G_d*) $S_n = n$ se il nome in inglese di questo intero ha un numero pari di vocali, altrimenti $S_n = (n \bmod 5) + 9$

si adatta perfettamente ai dati...).

Ora, perché dico che questo è un problema? Dopo tutto, Y sa che X *non* sta pensando a una sequenza casuale, almeno se X sta giocando in accordo con R2, quindi Y *sa* che la sequenza che deve indovinare ammette una descrizione adeguata. Ebbene, il problema è che Y non può farsene molto di questa conoscenza. Y sa che X non sta pensando ad una sequenza casuale, ma non sa che cosa ciò comporti. Y non sa quali sequenze sono escluse perché non possiede alcuna procedura effettiva per dire quali siano i candidati accettabili. Potrebbe credere che un certo modo di continuare il segmento iniziale sia scorretto perché potrebbe non essere capace di ricondurlo a una regola, ma potrebbe semplicemente sbagliarsi. Y potrebbe semplicemente essere incapace di vedere la configurazione soggiacente, quindi potrebbe trattare la sequenza come casuale quando di fatto non lo è. Quel modo di continuare il segmento iniziale potrebbe essere esattamente quello a cui sta pensando X.

Riassumendo, ecco dunque il quadro che emerge da queste considerazioni. Se aderiamo a una nozione generica di casualità come assenza di regole, allora nessuna sequenza è casuale e R2 è perfettamente inutile. Se, d'altra parte, aderiamo alla più austera definizione di casualità come incompressibilità, allora ci sono sequenze casuali e R2 ha una sua utilità in linea di principio. Sul piano pratico, tuttavia, resta perfettamente inutile. Possiamo convincerci *che* una data sequenza ottemperi al requisito della non-casualità. Ma possiamo non essere nelle condizioni di determinare con certezza *se* una data sequenza ottemperi a quel requisito.

5. Giocare sul serio

Che cosa ci resta? Il «gioco della regola» – abbiamo scoperto – non può essere giocato senza rischi. Ma per quale motivo dovremmo preoccuparcene? Dopo tutto ci sono molti altri giochi a cui possiamo partecipare; perché darsi tanta pena?

Ebbene, ci sono effettivamente un sacco di altri giochi a cui possiamo partecipare senza alcun pericolo, ma come già abbiamo avuto modo di osservare, questo è un gioco che non possiamo ignorare tanto facilmente. Il gioco della regola è un gioco che *pratichiamo sempre*, ogni

volta che ci impegniamo in un ragionamento induttivo di stampo humiano. Lo pratichiamo ogni volta che cerchiamo di portare alla luce i meccanismi del mondo in cui viviamo, le leggi della natura e le leggi della società. Non ci cimentiamo con banali sequenze di numeri ma con le sequenze di eventi che costituiscono la nostra storia, nel tentativo di dare loro un senso e di capire dove ci stanno conducendo. E dire che questo è un gioco che non si può praticare in modo sicuro non equivale ad asserire che possiamo smettere completamente di praticarlo.

A questo punto il cerchio si chiude e la nostra storia diventa una storia familiare per la filosofia della scienza. Alcuni pensano che il tipo di scetticismo che abbiamo illustrato debba essere preso molto sul serio. Per quanto ne sappiamo, il mondo potrebbe non *tentare* nemmeno di giocare in accordo con R1 e R2, nel qual caso le nostre pratiche induttive humiane riposerebbero semplicemente su un falso presupposto. Ma anche se il mondo stesse tentando di giocare nel rispetto delle regole – anche se gli eventi con cui abbiamo a che fare fossero in completo accordo con il presupposto di un mondo governato da leggi – il fatto che i fenomeni non casuali non siano identificabili in modo efficace sarebbe sufficiente per giustificare un atteggiamento meramente pragmatico nei confronti dell'impresa in cui è impegnata la scienza. Non avrebbe cioè alcun senso sperare di «svelare il codice»; potremmo solo sperare di partecipare al gioco in modo tale da trarre soddisfazione per le leggi che *noi* riusciamo a concepire, esattamente come traiamo soddisfazione dalle leggi sociali e politiche con cui tentiamo di disciplinare le interazioni quotidiane con i nostri pari. Altri la pensano diversamente. Non solo ritengono che dovremmo cimentarci nel gioco assumendo che il mondo lanci le sue sfide in ottemperanza alle regole R1 e R2; pensano anche che non dovremmo desistere dalla speranza di cogliere le cose nel segno. Dopo tutto, quando partecipiamo al gioco per divertimento, spesso vinciamo. Spesso riusciamo davvero a scoprire le configurazioni nascoste nonostante le difficoltà che abbiamo menzionato. Anche se il segmento iniziale che ci viene proposto non identifica la sequenza voluta in modo univoco, e anche se non siamo nella posizione di tenere sotto controllo i fattori casuali, spesso riusciamo davvero ad azzeccare la regola corretta perché le altre opzioni sono semplicemente troppo stravaganti per essere prese in considerazione. Perché non supporre che lo stesso possa accadere quando pratichiamo il gioco con il mondo naturale? Tutto quello che dobbiamo fare è assicurarci che noi e il mondo siamo sulla stessa lunghezza d'onda, per così dire: che ciò che appare naturale o astruso a noi sia in effetti naturale o astruso *simpliciter*. La storia della scienza dimostra che qualche volta facciamo degli errori, ma

questo non ha mai trattenuto gli scienziati dal perseguire la loro ricerca con accresciuta determinazione. Al contrario, l'idea generale è stata che dagli errori si può sempre imparare qualcosa, e che siamo sempre più vicini a vincere il gioco al prossimo tentativo.

Non è questo il luogo per addentrarsi in questa controversa dialettica. Ognuno è libero di scegliere da che parte stare. Ma forse il dilemma che ci sta dietro si riesce ad apprezzare meglio una volta che iniziamo a vedere questa dialettica dal punto di vista qui suggerito. Perché, da un lato, non dobbiamo lasciarci sfuggire che praticare il gioco con il mondo della natura può essere più facile che giocare *inter nos*. Quando X e Y sono persone come noi, ognuna tenterà di vincere la partita; in particolare, X tenterà di lanciare la sua sfida in modo da rendere difficile per Y indovinare la risposta corretta, farà ogni sforzo per escogitare una regola che sia molto difficile, se non cioè impossibile, da scoprire nel tempo disponibile. Per contro, non c'è ragione di supporre che sia così che il mondo là fuori lancia le sue sfide. Il mondo non è un agente intenzionale e non gli importa di «vincere» al gioco, o almeno così possiamo supporre. In questo senso, la pratica dell'induzione scientifica non è necessariamente così difficile come partecipare al gioco della regola contro un avversario intelligente che cerca di essere più astuto di noi, e il pensiero che si debba tentare di essere sulla stessa lunghezza d'onda del mondo è tutt'altro che irragionevole. (Proprio questa era la logica su cui si reggeva il principio di Keynes di «varietà limitata», un principio le cui radici possono essere fatte risalire alla filosofia di Francis Bacon ([10]): un oggetto di inferenza induttiva non dovrebbe essere infinitamente complesso, né determinato da un numero infinito di generatori, e se assumiamo che il mondo stia giocando secondo le Regole possiamo ben supporre che stia anche giocando in accordo con questo principio aggiuntivo). D'altra parte, c'è anche un senso importante in cui partecipare al gioco delle regole con il mondo naturale non sia tanto facile quanto giocare *inter nos*. Quando giochiamo tra di noi, un giocatore fornisce l'inizio della sequenza e l'altro deve scoprirne il resto. Può essere difficile, per le ragioni che abbiamo visto, ma almeno l'input è chiaro: il primo giocatore lo fornisce in modo esplicito. Quando giochiamo con il mondo, invece, dobbiamo stare attenti. Non tutte le serie di eventi vanno considerate alla stessa stregua. Possiamo assistere al sorgere del

([10]) Si veda J.M. Keynes, *A Treatise on Probability*, Macmillan, New York, 1921, cap. 22; tr. it. a cura di A. Pasquinelli & S. Marzetti: *Trattato sulla probabilità*, Clueb, Bologna, 1994 Lo si confronti con la *Magna Instauratio* di Bacone e con il Libro II del suo *New Organon*.

sole ogni mattina e assumere questa informazione come input per una legge che possiamo ragionevolmente formulare come una generalizzazione induttiva humiana. Potremmo anche pensare che valga la pena studiare attentamente la serie di eventi che otteniamo lanciando una moneta, perché in fondo potrebbe non essere affatto una sequenza casuale. Ma quando cambiamo compulsivamente i canali durante un'interruzione commerciale, la serie di eventi che si susseguono sul nostro schermo TV non merita di essere studiata. Quando controlliamo il cielo ogni volta che singhiozziamo, la serie di eventi che otteniamo non è degna di alcuna considerazione. Ciò non equivale a dire che si tratta di serie casuali: potrebbe benissimo esserci una qualche configurazione nascosta, per quanto ciò possa apparire sorprendente («Ogni volta che guardo gli Yankees, quelli perdono»). È solo che queste serie di eventi non sono interessanti. Non contano, per così dire. E non contano perché continuerebbero ad esserci *anche se si scoprisse che viviamo in un mondo totalmente deterministico*, un mondo in cui nulla fosse casuale e tutto accadesse per una ragione. Per dirla in breve, quando giochiamo con il mondo dobbiamo scoprire *quali* siano le sequenze da considerare prima di iniziare a scoprire *come* siano fatte, perché il mondo non ce lo dice. Il mondo non lancia le sue sfide nello stesso modo esplicito in cui lo fanno le persone che giocano tra di loro.

Ora, proprio questa è la difficoltà principale del ragionamento induttivo humiano. Possiamo convivere con la casualità e possiamo convivere con il fatto che la casualità sia indecidibile. La scienza ha imparato a far fronte a queste difficoltà, in un modo o nell'altro. Possiamo perfino assumere che il mondo – a differenza dei giocatori umani più abili – non abbia alcun interesse a *batterci*. Ma dobbiamo stare attenti, perché la nostra conformazione cognitiva è tale da indurci a cercare costantemente configurazioni e tendenze anche quando non ve ne sono. E possono non essercene, non perché le sequenze con cui abbiamo a che fare possono essere casuali, ma perché è possibile che non si abbia affatto a che fare con delle sequenze. Forse stiamo semplicemente esercitando «la ridicola arte della Geomanzia», come diceva Leibniz, e quello non è un modo per partecipare al gioco. Perché alla fine, quando si tratta di giocare sul serio, la tacita Regola sulla quale non possiamo fare *mai* affidamento è anche la più ovvia e importante di tutte:

R3 *Il segmento iniziale della sequenza deve essere dato in modo esplicito.*

Achille C. Varzi (Columbia University, New York).