Tatiana Arrigoni (*)

L'INFINITO MATEMATICO TRA FILOSOFIA E SCIENZE DELLA COGNIZIONE
IL CASO-STUDIO DEGLI INSIEMI INFINITI

Abstract - Arrigoni T., 2011 - Infinity in mathematics and cognitive science. Infinite sets: a case study.

Atti Acc. Rov. Agiati, a. 261, 2011, ser. IX, vol. I, B: 5-19.

The present contribution is concerned with the notion «infinite set», a notion which, although looking very familiar, at a closer analysis reveals problematic, «difficult to be thought». By invoking results obtained in contemporary cognitive science a proposal is advanced as to a possible ontogenetic account of the notion «infinite set». The proposal is meant to explain both the naturalness of infinite sets and the difficulties into which our thinking of them runs into.

Key words - Potential/actual infinity, Infinite sets, Cognition.

Riassunto - Arrigoni T., 2011 - L'infinito matematico tra filosofia e scienze della cognizione. Il caso-studio degli insiemi infiniti.

Il presente contributo verte sulla nozione di insieme infinito quale nozione che, di primo acchito familiare, si rivela ad un'analisi concettuale più approfondita, problematica, «difficile a pensarsi». Attingendo ai risultati delle contemporanee scienze della cognizione il contributo propone una chiave di lettura ontogenetica della nozione di insieme infinito che sia capace di rendere ragione sia del nostro intendere gli insiemi infiniti come naturali che dei conflitti in cui il pensiero degli stessi incorre.

Parole chiave - Infinito potenziale/attuale, Insiemi infiniti, Cognizione.

(*) Fondazione Bruno Kessler, Trento.

1. Introduzione ... all'infinito

«Infinito». Al solo udirlo il termine evoca spontaneamente svariate nozioni, parole, immagini. Si può essere immediatamente richiamati al pensiero dei numeri, dei numeri interi positivi o *naturali:* 0, 1, 2, 3, ... Essi sono infiniti: infinita è la loro totalità; infinito il processo della loro generazione o progressiva identificazione attraverso il contare(li). Oppure può affacciarsi subito alla mente il pensiero di Dio. Anche questi è infinito, secondo una certa nozione dello stesso consegnataci da filosofie, teologie, religioni. Conformemente ad essa, Dio è infinito perché non sottoposto a limiti che caratterizzano la condizione umana e costituiscono ciò in cui consiste la finitezza che noi ci attribuiamo. Dio è eterno, ubiquo, onnisciente, onnipotente. Nella perfezione non incrementabile del suo essere consiste la sua infinità.

Non si tratta, questi, di esempi di infinito scelti a caso. Sono visioni dell'infinito assai generali, proprie anche del senso comune, che le accetta di primo acchito come non problematiche. Sono, inoltre, visioni dell'infinito diverse e paradigmatiche di modalità differenti di intendere lo stesso, modalità che intendo ora rendere esplicite.

Si considerino i numeri naturali. Intesi come successione i cui membri sono generabili (o identificabili) senza fine, perché «si può sempre andare avanti a contare(li)...», il loro essere infiniti si esprime in un modo d'essere di tipo *potenziale*, nel loro *non essere* mai dati tutti, sino alla fine, a colui che (li) conta, una forma d'essere, questa, connessa a (determinata da? determinante?) il fatto che una qualsiasi successione finita di numeri naturali *può* essere sempre di nuovo incrementata con l'aggiunta di un numero non incluso nella successione stessa ([1]). Se si considera, invece, come infinita la *totalità* dei numeri interi positivi, l'infinito si presenta come proprietà di un'entità *attuale*, di un qualcosa che è già tutto ciò che ha da essere, connotato, quale è appunto tale qualcosa, come totalità ([2]).

([1]) Esemplari descrizioni del modo d'essere infinito che si addice ai numeri interi positivi in quanto successione che, al contarne i membri in maniera ordinata, si rivela sempre di nuovo estendibile, sono state fornite da Aristotele nella *Fisica*. «[...] *non ciò al di fuori del quale non esiste nulla*, *ma ciò al di fuori del quale vi è sempre qualcosa*, *questo è infinito*» (Aristotele, 1999, p. 204). «*È dunque infinito ciò al di fuori del quale è sempre possibile prendere qualcosa*, *se si prende secondo la quantità*» (Aristotele, 1999, p. 204).

([2]) Così Aristotele, nella *Metafisica*, sulla nozione di totalità: «*Si dice totalità ciò cui non manca nessuna delle parti delle quali si dice che per natura è costituita*» (Aristotele, 1974, p. 336).

Il caso di Dio, è ancora più univoco. Dio *è* (caratterizzato come) eterno, ubiquo, etc.; l'infinità che ad esso si attribuisce si configura come un modo d'essere *attualmente* posseduto da un ente che è, e, con ciò, come un modo d'essere positivo, come un essere effettivamente in una certa maniera (3).

Dell'infinito si tratta anche nella matematica contemporanea, dove esso occorre, tra l'altro, sotto la forma della nozione di *insieme infinito*. È su tale nozione, oggetto di una specifica disciplina (la *teoria degli insiemi*), che il presente contributo si concentra (4). Perché? Il fatto è che, come alcuni degli esempi sopra addotti già potrebbero suggerire, la nozione di insieme infinito si rivela tale che, per quanto essa non si configuri come esplicitamente contraddittoria, il pensiero della stessa può risultare, per così dire, afflitto da qualche difficoltà. Ciò può emergere senz'altro già a livello di senso comune prima che di speculazione filosofica. L'analisi concettuale esplicita mostra, poi, la natura in effetti complessa e intrinsecamente conflittuale della nozione in questione. D'altra parte, resta il fatto che in teoria degli insiemi ci riferisce ad insiemi infiniti e li si studia, assumendo non solo che fare ciò sia possibile senza incorrere in contraddizione, ma anche che farlo sia un'impresa intellettuale legittima e doverosa, dotata di senso e volta ad analizzare in termini matematici il contenuto di una nozione di portata generale (5).

Stando così le cose, è naturale domandarsi in quale rapporto stiano la difficoltà a pensare la nozione di insieme infinito, sopra asserita, e l'esistenza di un *corpus* di cognizioni matematiche concernenti gli insiemi infiniti. Non si tratta di mutua esclusione, evidentemente: la teoria esiste ma le difficoltà sussistono, e viceversa. Come si spiega tale situazione?

Nel tentativo di dare una risposta a questa domanda, considererò quali suggerimenti in tal senso provengano dalle contemporanee scienze della cognizione. Intendo però preliminarmente spiegare perché dico la nozione di insieme infinito tale che il suo pensiero si possa considerare afflitto da qualche difficoltà, ché si fa fatica, per così dire, a «pensare davvero» ad insiemi infiniti. A ciò è dedicato il paragrafo seguente.

---

(3) Per un'ampia visione d'assieme sulla speculazione filosofica-religiosa-matematica prodotta nella storia intorno all'infinito si considerino le monografie Zellini 1980 e Moore 1990.

(4) Per una recente concisa presentazione della teoria degli insiemi in lingua italiana, si veda Lolli 2008.

(5) Sulla presunta generalità della nozione di insieme si veda Arrigoni c.s.

2. Insiemi infiniti. Dove sta il problema?

Un insieme infinito è da intendere, secondo un modo di parlare che talora viene detto *metaforico* o *idealizzante*, come una collezione avente una moltitudine infinita di elementi (6). Ovvero è da intendere come un'infinità di oggetti (matematici) che, in quanto considerati come dati o esistenti «tutti», sono poi intesi come collezionati a costituire una realtà unitaria, un *insieme*, appunto, avente gli stessi come elementi. Alternativamente, si dice di intendere un insieme infinito come una collezione di infiniti elementi che, in quanto «tutti» collezionati, sono poi da considerare come dati o esistenti «tutti» (7). Si consideri l'esempio seguente. Ciò che nel linguaggio matematico si chiama *omega* (ω), l'insieme di tutti i numeri naturali, è (descritto come) la collezione della loro moltitudine infinita, e, in quanto tale, quale moltitudine attualmente esistente o data. Alternativamente si descrive *omega* come una moltitudine attualmente esistente o data e, quindi, collezionata a costituire un ente unitario, un tutto, un insieme (la *totalità* dei numeri naturali, appunto).

Sono infinità attuali, dunque, gli infiniti di cui si tratta in teoria degli insiemi, in quanto moltitudini che si suppongono complete di tutte le loro componenti – così si dice, quantomeno, di intenderli e manipolarli quando si viene introdotti alla teoria, talora, ripeto, con il *caveat* che si tratta di un modo di parlare metaforico o idealizzante. Ciò non toglie, tuttavia, che il nostro pensiero della moltitudine degli elementi di un insieme infinito si configuri come tale che noi, indipendentemente da come ci viene detto di intendere e trattare tale moltitudine, o dichiariamo di farlo in sede matematica, non possiamo «davvero» pensarla come esistente o data in tutte le sue parti, completa di tutti i suoi membri, che, in quanto «dati tutti», sono poi collezionati (o viceversa, come collezione di membri infiniti che, in quanto collezionati, sono poi da riguardarsi come esistenti o dati «tutti»). È una moltitudine infinita, infatti, quella degli elementi di un insieme infinito. Quando volgiamo ad essa il nostro pensiero, spontaneamente mettiamo in relazione i suoi elementi a processi mai terminabili di identificazione degli stessi, spe-

(6) La natura metaforica e idealizzante di certe elucidazioni intorno agli insiemi infiniti (e alla cosiddetta gerarchia cumulativa degli insiemi), consistente nel fatto che esse includono l'invito a ragionare «come se»..., è asserita esplicitamente, ad esempio, in Wang 1974. Cfr. nota 11.

(7) Si rimanda anche alle definizioni di insieme date da G. Cantor, fondatore della teoria degli insiemi, in Cantor 1883 e Cantor 1895.

cialmente di identificazione «ordinata» degli stessi, per così dire, di identificazione di essi uno dopo l'altro senza tralasciarne alcuno (si pensi, appunto, di nuovo ad *omega*) – sempre che siamo in grado di concepire tali processi. Ovvero: l'idea di infinito potenziale sembra inevitabilmente evocata dalla nozione di insieme infinito non appena la nostra attenzione si sposti dal pensiero dell'insieme come collezione o totalità di elementi, a quello dei suoi elementi, individualmente considerati come oggetti da passare in rassegna e collezionare. Tale idea entra in conflitto con quella di attualità che compete all'insieme in quanto insieme, in quanto collezione «ultimata», o totalità che, come tale, evoca atti di collezione o, più generalmente, di identificazione di individui che hanno da finire.

L'analisi concettuale sembra così rivelare una dialettica irrisolta tra attuale e potenziale nel nostro intendimento della nozione di insieme infinito, ciò che determina l'insorgenza di una certa difficoltà a pensarla come esprimente un contenuto senz'altro coerente ([8]).

Si noti che quelle che qui si riportano non sono impressioni individuali. La difficoltà a pensare la nozione di insieme infinito sta infatti alla base del veto posto dalla filosofia sulla nozione di moltitudine infinita come realtà attuale e, forse, del «ritardo» con cui la matematica fece oggetto di studio gli insiemi infiniti (la teoria degli insiemi di Cantor nacque solo sul finire dell'Ottocento). Quanto alla teoria cantoriana degli insiemi, poi, essa offrì strumenti concettuali per parlare degli insiemi infiniti, confrontandoli tra loro nei termini della possibilità o meno di rinvenire una relazione di corrispondenza biunivoca tra i loro elementi. In tale maniera fu possibile distinguere taglie differenti di infinito e costruire una gerarchia degli infiniti. Ciò non significò tuttavia dissolvere ogni perplessità in merito alla possibilità di un discorso matematico sensato sugli insiemi infiniti. Anzi certe conseguenze apparentemente paradossali della posizione di insiemi infiniti quali oggetti matematici sembrarono deporre contro piuttosto che a favore della nozione di insieme infinito come possibilità concettuale coerente. Alcune di esse erano già da tempo note. Si prenda, ad esempio, di nuovo l'insieme di tutti i numeri naturali, *omega*. L'insieme dei numeri pari (dispari) si configura come un sottoinsieme dello stesso, una sua parte. Possiamo figurarci

([8]) Significativamente il riconoscimento di tale dialettica si ritrova nello stesso Cantor, ma in termini rovesciati (la coerenza dell'idea di infinito potenziale richiederebbe l'ammissione dell'infinito attuale, per Cantor), ad asserire l'inevitabilità della nozione di insieme infinito (vedi ARRIGONI c.s.).

processi del generarlo in cui elementi di *omega* sono sistematicamente omessi. Eppure, considerandole come collezioni date, le totalità dei numeri naturali e quella dei numeri pari (dispari) sono altrettanto infinite, i loro elementi possono essere posti in una relazione di corrispondenza biunivoca.

Né le nostre aspettative concernenti la relazione parte/intero sono le sole ad essere contraddette dalla nozione di insieme infinito. Una certa idea di non incrementabilità legata all'infinito come modo d'essere attuale viene contraddetta dal fatto che esistono insiemi infiniti di grandezza diversa, ovvero tali che i loro elementi non possono essere messi in una relazione di corrispondenza biunivoca. Si prenda di nuovo *omega* e l'insieme di tutti i suoi sottoinsiemi, ovvero il rappresentante insiemistico dei numeri reali. Il secondo è più numeroso – si potrebbe dire «più infinito», per quanto tale maniera di esprimersi possa sembrare contradditoria – del primo.

Infine, benché la teoria degli insiemi si intenda come tale da mostrare la possibilità di un discorso matematico su moltitudini infinite assunte come attuali, essa si confronta nel corso del suo sviluppo coi limiti della possibilità che essa stessa pretende di attualizzare. Esistono moltitudini infinite descrivibili nel linguaggio della teoria, esattamente moltitudini di insiemi, che non possono essere assunte come attualmente date, ovvero come tali che si possa formarne la collezione e farne un insieme, pena la contraddizione. Si pensi alla moltitudine di tutti gli insiemi la cui esistenza si può dimostrare all'interno della teoria degli insiemi. Ammettiamo che essa sia un insieme al pari di altre moltitudini infinite, l'*insieme di tutti gli insiemi*. Se ciò fosse, esso non includerebbe però se stesso come elemento, e allora non sarebbe l'insieme di tutti gli insiemi, contrariamente alla sua definizione. Parrebbe così che all'interno della teoria degli insiemi la moltitudine di tutti gli insiemi può essere solo considerata alla stregua di un infinito potenziale ([9]). Ciò torna a porre la questione della difficoltà a pensare una moltitudine infinita come attualmente data entro la teoria stessa che tale difficoltà pretende di avere superata. Ciò porta altresì ad interrogarsi sulla natura di tale superamento.

Chiarito in che cosa consista quella che io ho denominato «difficoltà a pensare la nozione di insieme infinito», torno a porre la domanda della relazione tra la stessa e l'esistenza di una disciplina matematica in cui si trattano gli insiemi infiniti e si suppone che fare ciò abbia il senso

([9]) Si veda JANÉ 1995 sulla questione.

della sottoposizione a rigorosa trattazione formale di una nozione generale. Mutua esclusione? Qualcuno potrebbe pensare di sì. La natura conflittuale della nozione di insieme infinito, l'incapacità da parte nostra di pensare un oggetto che esemplifichi tale nozione, ovvero che si configuri come una collezione infinita, senza che il nostro pensarlo incorra in difficoltà, potrebbe essere vista come tale da negare anche la possibilità della legittimità di ogni discorso, matematico e non solo, che tratti della nozione di insieme infinito. Viceversa, il fatto che esista un discorso sugli insiemi infiniti, un discorso che assume la forma di una teoria matematica rigorosa, e che si possano acquisire nuove cognizioni concernenti gli insiemi infiniti, potrebbe indurre a pensare che l'analisi concettuale sopra condotta sia errata o incompleta, che esista un pensiero non problematico della nozione di insieme infinito anche a livello pre- o extra matematico, poi formalizzato con gli strumenti della matematica. Allora i rilievi inizialmente riportati, e le considerazioni filosofiche a loro supporto, non coglierebbero del tutto nel segno. Di fatto esistono posizioni in filosofia della matematica che negano che la pratica della teoria degli insiemi debba essere descritta come un processo dell'intendere significati a noi già familiari a livello pre- o extra-matematico ([10]). Alternativamente esistono posizioni che affermano che la teoria degli insiemi poggi su una certa cognizione pre- o extra matematica della nozione di insieme infinito, la renda formalmente rigorosa e la sviluppi. Dove sta la verità?

3. Una sfida

La sfida raccolta dal presente contributo è quella di lasciar sussistere la congiunzione «impensabilità non conflittuale della nozione di insieme infinito» *et* «significatività (a livello matematico ma non solo) della nozione di insieme infinito», e di ricomporla entro un quadro coerente. Nel proporre ciò, muovo da una duplice consapevolezza. Da un lato, la nozione di insieme o collezione infinita, pur rimandando a qualcosa di difficile o impossibile a pensarsi, non appare esplicitamente contraddittoria, a differenza, ad esempio, della nozione di quadrato rotondo. Dall'altro lato, esiste il discorso matematico sugli insiemi infiniti,

([10]) Tale possibilità fu negata dalle scuole costruttiviste in matematica sorte sul finire del XIX secolo, che asserirono l'incoerenza della nozione di insieme infinito (si veda Dummett 2011 per una presentazione generale).

quale discorso nel contesto del quale la nozione indagata occorre come dotata di significato.

Intendo approssimarmi all'obiettivo indicato, attuando una sorta di «rivoluzione copernicana». Ovvero, nell'analisi della nozione di insieme infinito quale contenuto intenzionale legittimo, non contraddittorio benché «difficile a pensarsi», mi concentrerò esclusivamente sul soggetto che concepisce e manipola insiemi infiniti, indagando se e come la nozione in questione possa essere considerata quale prodotto inevitabile, benché forse *sui generis*, di specifiche facoltà cognitive umane. Intendo altresì decifrare tale/i facoltà, e i modi del suo/loro funzionamento, consultando immagini del soggetto consegnateci da ambiti disciplinari differenti dalla filosofia, in particolare dalle contemporanee scienze della cognizione. A tal proposito, si consideri quanto segue.

Come sopra accennato, è assai frequente una certa caratterizzazione della nozione di insieme infinito quale collezione (infinita) come *metaforica* o *idealizzante*, come nozione formulata e intesa ragionando «come se...» (esattamente, «come se» esistessero processi di identificazione «ordinata» dei membri di una totalità infinita e potessero essere terminati) ([11]). Tale modalità di intendere la nozione di insieme infinito quale collezione infinita appartiene tanto al «senso comune» della comunità insiemistica, quanto alla letteratura più propriamente filosofica. Essa è stata adottata anche nel contesto di una specifica letteratura di scienze della cognizione che, analizzando la matematica in riferimento a processi cognitivi di carattere generale, descrive esplicitamente l'infinito insiemistico come *metafora concettuale* (esattamente l'in-

---

([11]) Si consideri il seguente passaggio tratto da WANG 1974, ove si introducono esplicitamente come *idealizzazioni* gli atti mentali di cui ci si dice che, nel pensare gli insiemi infiniti, dobbiamo considerare «come se» fossero possibili. «*Possiamo formare un insieme a partire da una moltitudine solo nel caso in cui il raggio di variabilità di tale moltitudine sia in qualche modo intuitivo. Questo è il criterio per determinare se una moltitudine forma un insieme per noi* [...]. *Un concetto intuitivo, a differenza di un concetto astratto come la malattia mentale o una quantità differenziabile, ci permette di abbracciare con uno sguardo d'assieme (o guardare attraverso o percorrere o collezionare insieme) in un senso idealizzato, tutti gli oggetti nella moltitudine, dai quali risulta l'estensione del concetto.* [...] *Abbracciare con uno sguardo d'assieme un ambito infinito di oggetti presuppone un'intuizione infinita che è un'idealizzazione. In senso stretto possiamo percorrere solo ambiti finiti (e, probabilmente, solo di taglia limitata). Questa idealizzazione contiene in se stessa i semi per crescere ulteriormente. Ad esempio, non solo infiniti numeri interi sono presi come dati, ma intendiamo come dato anche il processo di selezionare numeri interi da questa unità di tutti i numeri interi, e così la possibilità di escludere numeri nel corso di tale processo. Così otteniamo una nuova idealizzazione intuitiva (cioè l'insieme di tutti gli insiemi di numeri interi) e uno va avanti*» (WANG 1974, *trad. mia*).

finito insiemistico è visto come una metafora concettuale da Lakoff e Nuñez) ([12]). La produzione di metafore concettuali sarebbe a sua volta una fondamentale modalità cognitiva del soggetto, uno strumento che contribuisce alla produzione di una visione del mondo contenente concetti astratti, quali concetti significativi per quanto non riferentisi ad alcun oggetto di esperienza sensoriale.

Ad una prima analisi, intendere la nozione di insieme infinito quale collezione (infinita) come metafora concettuale pare promettente. Occorre tuttavia produrre un'analisi della facoltà di produrre metafore che sappia rendere ragione della peculiarità del caso in questione. In particolare occorrerebbe un'analisi della facoltà di produrre metafore che riconosca ad essa un aspetto creativo e persuasivo molto ardito, al limite della sfida allo stesso principio di non-contraddizione – ciò che sembra implicito, d'altra parte, nella caratterizzazione in termini di *idealizzazioni* degli atti invocati in connessione con gli insiemi infiniti. Si noti infatti che quando ci viene detto di intendere gli insiemi infiniti *come se* fossero collezioni infinite ci viene in realtà detto di intendere gli insiemi infiniti *come se* (ci fosse possibile pensare che) ci fossero collezioni infinite, ovvero come se potessimo pensare ad una collezione infinita come ad una qualcosa di perfettamente coerente, ciò che in realtà non è possibile, se le analisi sopra condotte colgono nel segno (par. 2). Non si instaura cioè un paragone tra due nozioni già disponibili e dotate di significato autonomo, come nelle metafore più ordinarie (es.: la vita è un viaggio). Si instaura implicitamente un paragone tra una nozione nuova (insieme infinito = collezione infinita) e una possibilità presentata come una generica possibilità coerente (introdotta implicitamente dal «*come se*» in «*come se* ci fossero collezioni infinite»). L'accostamento implicito tra le «impossibili» a pensarsi collezioni infinite e una generica possibilità coerente, dal canto suo, sortisce sì l'effetto di indurre a considerare le prima come una finzione, ma come una finzione in certo senso coerente, affidabile, accettabile. Occorrerebbe inoltre un'analisi non banale dei meccanismi di trasferimento di significato dalla fonte della nozione metaforica alla nozione metaforica stessa. Come le metafore più ordinarie, infatti, anche quella in questione (insieme infinito come collezione infinita) ha la struttura di un trasferimento di significato. Di un trasferimento implicito, si intende. La fonte da cui il significato viene trasferito sulla nozione di insieme infinito è rappresentata, infatti, dalle nozioni, perfettamente intellegibili, di collezione riferita al finito,

([12]) LAKOFF & NUÑEZ 2000.

e di infinito come modo d'esser potenziale, che non sono tuttavia menzionate nell'invito a considerare gli insiemi infiniti *come se* fossero collezioni infinite. Tale trasferimento, inoltre, non avviene nei termini della mera giustapposizione o combinazione coerente di contenuti (non si dà tale giustapposizione nel caso degli insiemi infiniti = collezioni infinite). Come esso avvenga è qualcosa che occorrerebbe studiare con cautela. Ciò forse gioverebbe anche alla chiarificazione della nozione di *idealizzazione*, invocata in riferimento agli insiemi come ad altri enti matematici. Al momento, in ogni caso, non esistono indagini che si muovano nella direzione indicata (almeno non sono note a chi scrive). Esistono invece critiche persuasive della presentazione della nozione di insieme infinito come metaforica o idealizzante ([13]). Altre strategie d'attacco della questione relativa a come sia da intendere la nozione di insieme infinito, rispetto a quella che invoca le metafore concettuali, sono pertanto auspicabili. Accennerò brevemente ad una di esse, a mio avviso più promettente.

Una certa facoltà di riferirsi contemporaneamente ad una molteplicità di individui (sottodeterminata quanto alla sua estensione quantitativa e, quindi, anche possibilmente infinita), ad una molteplicità che con ciò viene trattata come tale che su di essa ci si possa pronunciare come su un qualcosa di unitario o come su una totalità, sembra stare alla base della capacità di intendere ed usare termini universali nel linguaggio. Quando parlo de «l'uomo» dicendo, ad esempio, «tutti gli uomini sono mortali», per citare la premessa di un noto sillogismo, intendo riferirmi contemporaneamente alla totalità di tutti gli uomini che sono stati, che sono e che verranno. Tratto tale totalità come qualcosa di disponibile in tutte le sue parti, pur non intenzionando queste ultime individualmente e distintamente (o come indentificabili individualmente e distintamente). Mi pronuncio, infatti, non solo sugli uomini che sono stati e che sono, ma anche su quelli che non sono ancora, e che potrebbero magari essere infiniti. Li «anticipo» all'essere, ne attualizzo la possibilità, per così dire, indicando una proprietà che tutti verranno ad istanziare. Gli insiemi di cui si tratta in teoria degli insiemi non sono intesi come estensioni di concetti, come totalità di individui che «cadono sotto» un medesimo universale o, in termini linguistici, come moltitudini a cui ci si può riferire attraverso il medesimo termine generale. Sono collezioni costituite dai loro elementi, quali che essi siano (anche collezioni di individui scelti del tutto a caso, non aventi alcuna proprietà in comune,

([13]) Si veda, ad esempio, Parsons 1975 e Parsons 2000.

sono da considerare insiemi, matematicamente parlando). Resta, tuttavia, che esistono insiemi «matematici» che possono senza dubbio essere visti come estensioni di concetti esprimibili nel linguaggio della teoria degli insiemi (si prenda di nuovo *omega*. Può essere inteso come l'estensione del concetto «essere numero naturale» espresso insiemisticamente. Qualcuno agli inizi del secolo chiamò tali collezioni *classi* per distinguerli dagli insiemi propriamente detti, collezioni «messe assieme» anche a caso). Questa situazione suggerisce di chiamare in causa le contemporanee scienze della cognizione, onde considerare se le dinamiche, da esse identificate, come responsabili dei processi di formazione e comprensione di concetti e termini universali possano essere intese, sotto qualche punto di vista, come tali da includere forme di «attualizzazione» di moltitudini anche infinite. Ciò sembra in effetti il caso.

Ai cosiddetti sistemi di *core-cognition* identificati nelle contemporanee scienze della cognizione ([14]), appartiene la categorizzazione conformemente al genere (*kind-categorization*), ovvero l'accomunare individui numericamente distinti sulla base della condivisione d'una medesima natura. Quest'ultima, non rappresentata né implicitamente né esplicitamente codificandola nei termini di una lista di proprietà, è di solito denominata *essenza* in letteratura, a sottolinearne il carattere elusivo ([15]). Ciò che rende la categorizzazione di genere rilevante rispetto al problema qui indagato è il ruolo che si è ipotizzato essa giochi rispetto all'apprendimento della distinzione linguistica tra plurale e singolare. Attiva negli umani a partire dai sette-nove mesi ([16]), la categorizzazione di genere si suppone reclutata, a partire approssimativamente dai ventidue-ventiquattro mesi, nel comprendere la differenza tra espressioni linguistiche plurali/singolari, quali espressioni che significano, rispettivamente, molte/una entità. In particolare si è suggerito che tale differenza sia originariamente *rappresentata*, ovvero intesa ad un livello di comprensione implicita e irriflessa ([17]), nei termini della differenza tra espressioni che

([14]) Nei termini di sistemi di *core-cognition* si intende una classe di rappresentazioni mentali risultanti da processi di elaborazione di informazioni aventi la medesima struttura in infanti, adulti e animali non umani. La presenza di tali rappresentazioni negli umani è di conseguenza da considerarsi parte dell'eredità evolutiva degli stessi piuttosto che esito di sviluppi culturali (nella specie) e di processi di apprendimento (nell'individuo). Si considerino, sui sistemi di *core-cognition*, CAREY 2009 e SPELKE & KINZLER 2007.

([15]) Si veda GELMAN 2003.

([16]) Inizialmente essa opera in riferimento a generi di ampia estensione, come mostrato da Mandler, in MANDLER 2004.

([17]) Nelle contemporanee scienza della cognizione, il termine «rappresentazione» è usato, in maniera non del tutto immune da obiezioni possibili, come tale da significano la totalità degli individui di un medesimo genere, quale molteplicità o pluralità (o *insieme* – così si trova in letteratura), e espressioni che significano un individuo singolo del genere, quale elemento della molteplicità o pluralità (o *insieme*) in questione ([18]). Si noti che la rappresentazione del genere (*kind*) appare non includere informazioni relative alla cardinalità esatta della molteplicità che il genere costituisce e/o alla decidibilità dell'appartenenza al genere di un qualsiasi individuo. Il genere pare cioè postulato come una molteplicità in sè data, e non in quanto inteso come una collezione di individui identificabili nella loro totalità sulla base di informazioni e istruzioni esplicite.

Stando così le cose, se si suppone che nella cognizione umana la categorizzazione di genere si estenda anche ad enti matematici, sembra rendersi disponibile una chiave di lettura del riferimento a molteplicità infinite come totalità e viceversa, quale atto sensato, legittimo, e financo inevitabile, a dispetto della «difficoltà a pensarsi» del contenuto risultante. Dati di carattere *ontogenetico* suggeriscono ciò, almeno in un caso speciale, già più volte invocato nel presente contributo, quello di *omega*, dell'insieme dei numeri naturali (interi positivi). Si noti che, per quanto la proposta che si vuole qui formulare chiami in causa processi in forza dei quali si realizza un riferimento alla totalità (infinita) degli interi nel bambino, essa intende essere rilevante anche rispetto all'adulto. Infatti i processi in questione, includendo meccanismi di *core-cognition*, continuano inevitabilmente a darsi, una volta che la familiarità con gli interi sia stata acquisita, nel corso della vita intera. Si noti anche che, per quanto io mi riferisca qui alla totalità degli interi come rappresentazione alla quale concorrono sistemi di *core-cognition*, con ciò non voglio dare ad intendere che tale rappresentazione risulti unicamente da tali sistemi. Non pare infatti possibile intendere i numeri interi, quali enti matematici, come *core-representations* ([19]). Infine, un ultimo *caveat*. Quel che qui si suggerisce è una proposta teoretica, priva di riscontri sperimentali al momento. D'altra parte, per quanto la cognizione nu-

riferirsi a «stati del sistema nervoso che hanno contenuto, che si riferiscono a enti concreti o astratti (o persino fittizi), proprietà, eventi» (Carey, 2009, p. 5, *trad. mia*). Non mi interessa qui pronunciarmi sulla plausibilità di tale uso del termine. Mi interessa notare, piuttosto, che il termine è così inteso che rappresentazioni mentali possono venire ascritte a soggetti senza che questi siano esplicitamente coscienti di stare rappresentando un contenuto, o dispongano delle abilità linguistiche necessarie a descriverlo verbalmente. A tale tipo di comprensione mi riferirò nel presente contributo nei termini di *rappresentazione*.

([18]) Tale suggerimento è contenuto in Carey, 2009.

([19]) Tale posizione si trova chiaramente sostenuta da Carey 2009.

merica e, più in generale, matematica, sia stata intensivamente investigata negli ultimi trent'anni, scarsa attenzione è stata riservata alla cognizione dell'infinito numerico, e di altre forme di infinito matematico. Le evidenze empiriche esistenti sono sparute e le ipotesi formulate mancano di solide conferme empiriche. Il quadro qui di seguito tratteggiato appare tuttavia compatibile con i dati disponibili ([20]).

Si ritorni agli interi e alla precedente affermazione che pare esistere una lettura *ontogenetica* della sensatezza, della legittimità e financo dell'inevitabilità del riferimento alla totalità di essi come insieme (infinito). Essa si configura come segue. Allorché alcuni numeri interi positivi ci siano divenuti, approssimativamente a partire dai sei anni, familiari come oggetti (per quanto come oggetti *sui generis*, ché astratti, oggetti specificamente matematici), gli interi verrebbero da noi automaticamente rappresentati come *genere* e, in quanto tali, ci sarebbero *ipso facto* noti, ancorché implicitamente, ovvero nella forma di una rappresentazione irriflessa, come una totalità, la totalità di tutti e soli gli individui che condividono l'essenza *numero intero* (o *numero simpliciter*). Tale totalità, esplorata in maniera esplicita attraverso gli strumenti dell'aritmetica, finisce (al più presto a partire dai sei-sette anni) col rivelarsi una molteplicità inesauribile rispetto a processi che volessero identificarne in maniera ordinata i membri, uno dopo l'altro (ad esempio continuando a sommare un'unità a partire dal numero «più piccolo»). In tal maniera essa, da noi originariamente tacitamente rappresentata come *totalità*, viene ad essere successivamente, in seguito all'esposizione all'aritmetica, da noi chiaramente percepita come una molteplicità di *infiniti* elementi. Si noti che le evidenze sperimentali suggeriscono che, così percepita, l'infinità degli interi, non porta *di fatto* alla cancellazione o alla rettifica della supposta preesistente rappresentazione di tali numeri come totalità, pur potendo entrare in conflitto con essa ([21]). Né si vede perché lo dovrebbe. Tale rappresentazione infatti, secondo la lettura qui proposta, poggia non su quella della possibilità di identificare fino ad esaurimento i membri di una molteplicità, con ciò intesi come collezionabili o collezionati a costituire un'unità, la loro totalità in quanto collezione, appunto. Essa poggia su un atto cognitivo diverso e più remoto, quello della «postulazione» di un *genere*, il genere di tutti e soli gli individui che condividono un'*essenza*, che si suppone essere qualco-

([20]) Dati rappresentati principalmente dagli esisti del lavoro di R. Falk sulla cognizione dell'infinito numerico (si veda, in particolare, Falk 2010).

([21]) Falk 2010, p. 36, riporta interessanti osservazioni di bambini in merito.

sa di determinato e reale indipendentemente dal saperla descrivere esplicitamente, ad esempio nei termini di una lista di proprietà. Quello della totalità degli individui di un genere sembra così configurarsi alla stregua di un contenuto rappresentazionale che, come non abbisogna della percezione della possibilità di identificare (e collezionare) gli enti che posseggono una certa essenza per essere in noi generato, così non viene in noi soppresso dalla scoperta esplicita dell'infinità di tali individui, ovvero dell'impossibilità di identificarli o collezionarli tutti, fino alla fine. Esso sopravvive a tale scoperta, continua a presentarsi a noi come familiare anche dopo di essa, coesistendo però a quel punto, ed entrando senz'altro in conflitto, con le rappresentazioni che scaturiscono dalla scoperta in questione (il potere andare avanti a contare/contare i numeri senza fine, ad esempio). La nozione di insieme infinito sarebbe esattamente il segno di tale sopravvivenza e coesistenza, quale sintesi ad un tempo sensata e «difficile a pensarsi».

Si noti che la naturale conseguenza della posizione qui espressa è che la nozione di insieme infinito appare più naturale e meno conflittuale di come l'abbiamo finora presentata se si lascia cadere la pretesa di intenderla esplicitamente come collezione, di caratterizzarla come da noi percepibile sia come totalità che come infinita nell'atto stesso del pensare alla collezione dei suoi membri «come se» tale collezione fosse possibile. Con ciò non solo non vengo qui a proporre una lettura metaforica o idealizzante della nozione di insieme infinito, ma suggerisco anche che tale lettura potrebbe rivelarsi fuorviante.

Ringraziamenti

Ringrazio la Provincia Autonoma di Trento, finanziatrice del progetto post-dottorale IMaCLiS (Infinito Matematico tra Cognizione, Linguaggio Storia, http://imaclis.fbk.eu) nel corso del triennio 2008-2011, la Fondazione Bruno Kessler, che ha ospitato tale progetto, e B.G. Caprile, che con me ha condiviso sforzi e soddisfazioni nel corso dello stesso. Ringrazio inoltre M. Dapor per l'interesse ad IMaCLiS, e il gentile invito a raccoglierne alcuni esiti nella forma del presente saggio.

Riferimenti bibliografici

Aristotele, *Metafisica* - Edizione UTET, Torino, 1974 (traduzione italiana di M. Zanatta).

Aristotele, *Fisica* - Edizione UTET, Torino, 1999 (traduzione italiana di M. Zanatta).

Arrigoni T., c.s. - «Insiemi e insiemi infiniti. Spunti dalle scienze della cognizione», in Cellucci C. (a cura di), *Paradigmi. Rivista di Critica Filosofica*.

CANTOR G., 1883 - Über unendliche, lineare, Punktmannigfaltigkeiten 5, *Mathematische Annalen*, 21, pp. 545-86, ristampato in ZERMELO 1932, pp. 165-209.

CANTOR G., 1895 - Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre I, *Mathematische Annalen* 46, pp. 481-512, ristampato in ZERMELO 1932, pp. 282-311.

CAREY S., 2009 - *The Origin of Concepts*, Oxford University Press, New York.

DUMMETT M., 2001 - *Elements of Intuitionism. Second Edition*, Oxford University Press, New York.

FALK R., 2010 - The Infinite Challenge: Levels of Conceiving the Endlessness of Numbers, in *Cognition and Instruction* , 28, pagg. 1-38.

FEIGENSON L., DEHAENE S. & SPELKE E.S., 2004 - Core systems of number, in *Trends in Cognitive Sciences*, 8, pagg. 307-314.

GELMAN S.A., 2003 - *The essential Child: Origins of Essentialism in everyday Thought*, Oxford University Press, New York.

JANÉ I., 1995 - The Role of the Absolute Infinite in Cantor's Conception of Set, in *Erkenntnis*, 42, pagg. 375-402.

LAKOFF G. & NUÑEZ R., 2000 - *Where Mathematics comes from. How the Embodied Minds brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

LOLLI G., 2008 - *Guida alla teoria degli insiemi*, Springer Italia, Milano.

MOORE G., 1990 - *The Infinite*, Routledge, London.

MANDLER J., 2004 - The *Foundation of Mind. The origins of the conceptual system*, Oxford University Press, New York.

PARSONS C., 1975 - What is the iterative concept of set?, in BENACERRAF P. & PUTNAM H., 1983 - *Philosophy of Mathematics*: *Selected Readings* (second Edition), Cambridge University Press, New York, pagg. 503-29.

PARSONS C., 2000 - Reason and Intuition, in *Synthese*, 125, pagg. 299-315.

RIPS L.J., BLOOMFIELD A. & ASMUTH J., 2008 - From numerical concepts to concepts of number. *Behavioral and Brain Sciences*, 31, pp. 623-642.

SPELKE E.S. & KINZLER K.D., 2007 - Core knowledge, in *Developmental Science*, 10, pp. 89-96.

WANG H., 1974 - The (maximum) iterative concept, in *From Mathematics to Philosophy*, George Allen and Unwin, London, pagg. 181-223.

ZELLINI P., 1980 - *Breve Storia dell'Infinito*, Adelphi, Milano.

ZERMELO E., 1932 - *Georg Cantor. Gesammelte Abbhandlugen mathematischen und philosophichen Inhalts*, Olms, Ildeshei.