Stefano Coser

GLI OPUSCOLI DI ANALISI SUBLIME DI GREGORIO FONTANA (*)

Abstract - Coser S., 1999 - Gregorio Fontana's *Analyseos Sublimioris Opuscula.*

Atti Acc. Rov. Agiati, a. 249, 1999, ser. VII, vol. IX, B: 329-374.

Gregorio Fontana (1735,1803), mathematician from the Trento province in the Italian Alps, was Professor of Mathematics and Chief Librarian at the University of Pavia, scientific divulger and actively involved in the Cisalpina Republic as a politician and legislator. In this article we present the contents, with extensive commentary on procedures followed and results achieved, of his first paper (Venice, 1763) on the three following subjects: resolution of trigonometric integrals such as $\int \mathrm{sen}^m x \cos^n x dx$, a new proof for Cotes's Theorem and a differential geometry problem concerning the osculatory radius and the evolute of a curve. Included is also a directory of Fontana's published works and a listing of articles on the scientist.

Key words - Gregorio Fontana, mathematical history, mathematical analysis, sublime analysis, integral calculus, trigonometry, Roger Cotes, properties of the circle, differential geometry.

Riassunto - Coser S., 1999 - Gli Opuscoli di Analisi Sublime di Gregorio Fontana.

Gregorio Fontana, matematico trentino del Settecento, fu docente e bibliotecario nell'Università di Pavia, divulgatore ed infine politico della Repubblica Cisalpina. Viene qui illustrato il contenuto della sua prima pubblicazione (Venezia, 1763) con approfonditi commenti sui risultati ottenuti ed i procedimenti seguiti. I tre opuscoli di cui l'opera è composta trattano: dell'integrazione di funzioni trigonometriche del tipo $\mathrm{sen}^m x \cos^n x$; di una nuova dimostrazione del Teorema di Cotes; di una questione di geometria differenziale concernente il raggio osculatore e l'evoluta delle curve. Si riporta inoltre un elenco delle opere a stampa del Fontana ed un elenco di articoli relativi allo scienziato.

Parole chiave - Gregorio Fontana, storia della matematica, analisi matematica, analisi sublime, calcolo integrale, trigonometria, Roger Cotes, proprietà del cerchio, geometria differenziale.

(*) Lavoro presentato dal Socio accademico Dr. Franco Finotti.

La vita

Gregorio Fontana (al secolo Giovanni Battista Lorenzo) nasce il 19 dicembre 1735 a Villa Lagarina, nei pressi di Rovereto, quarto di nove fratelli in una famiglia di notai residente a Pomarolo; compiuti i primi studi classici tra Rovereto e Arco, presto si allontana dalla sua terra, seguendo il destino di molti uomini di ingegno del Settecento trentino, per proseguire quelli religiosi a Roma ed in quella città vestire, nel 1755, l'abito ecclesiastico dell'ordine delle Scuole Pie col nome di Gregorio. L'ordine di S. Giuseppe Calasanzio è un ambiente adatto per la maturazione dell'indole del Fontana, volta all'attenzione verso le giovani menti ed alla loro formazione scientifica, così che dopo aver ricevuta l'ordinazione sacerdotale diviene lettore di Filosofia e Matematica nello scolopio Collegio Nazareno in Roma, dove rimane fino al 1759. Trasferito poi al Collegio di Senigallia vi rimane per due anni, nei quali ha l'occasione di frequentare l'insigne matematico locale Giulio Carlo Fagnani e l'ambiente colto bolognese; in questo periodo vede la luce la sua prima opera analitica, oggetto di questo articolo.

Dopo un breve periodo nel Collegio Calchi che il suo Ordine ha da poco istituito in Milano gli viene offerto dal conte di Firmian, suo conterraneo e governatore della Lombardia, un incarico come Professore di Logica e Metafisica all'Università di Pavia; nel 1768 giunge alla cattedra di Matematica Sublime mentre è già stato nominato responsabile della nuova Biblioteca dell'Università, che riesce nei numerosi anni durante i quali mantiene questo incarico a rendere sempre più completa con le opere più importanti e moderne in ogni campo del sapere. Rimarrà per tutta la vita a Pavia, spostandosi a volte a Milano o tornando a Rovereto, città alla quale sempre rimarrà legato, distribuendo il suo tempo e le sue energie tra gli incarichi di insegnante e di bibliotecario, la ricerca matematica e l'attività di divulgatore di opere da lui giudicate importanti, non solo scientifiche ma anche teologiche, filosofiche, storiche e politiche. Come direttore della Biblioteca si preoccupa soprattutto di renderla sempre al passo coi tempi, vagliando di persona le opere da acquistare, consigliando personalmente gli studenti nella loro scelta, escludendo dagli scaffali libri troppo conservatori e chiusi allo spirito di innovazione del secolo; merito del Fontana è quello di rendere note in Italia opere di importanti matematici stranieri quali Eulero e de Moivre, per le quali cura la traduzione e nelle quali non manca di aggiungere all'originale appendici, tavole, dissertazioni o teoremi propri che possano in qualche modo completare o chiarire al lettore il testo tradotto. Non di meno la ricerca matematica lo appassiona moltissimo;

GREGORIO FONTANA

dal ritratto di R. Focosi, inciso da L. Rados

nella R. Universitaria di Pavia

Fig. 1 - Gregorio Fontana, ritratto.

pubblica numerose memorie su varie riviste scientifiche che gli meritano una grande considerazione da parte della comunità scientifica italiana ed europea; tuttavia la sua dedizione all'insegnamento, la lettura delle opere da considerare per la «sua» Biblioteca, la curiosità e l'interesse per la novità fanno in modo che i suoi studi siano indirizzati in molte direzioni diverse, portando ognuno un piccolo contributo originale, ma non contenendo risultati sufficientemente rimarchevoli da valergli al giorno d'oggi una posizione nella storia della scienza proporzionata a quella che egli aveva in vita.

Il 1797 segna una svolta nella vita del sessantaduenne matematico: Napoleone Bonaparte, giovane generale dell'esercito vittorioso nel nord Italia, lo convoca a Milano per porlo tra i dieci incaricati della stesura della Costituzione della Repubblica Cisalpina. Scelto per la sua simpatia verso le innovazioni illuministiche, da qualche tempo allontanatosi dalla chiesa ed ottenuta la secolarizzazione, rimane legato alle sorti del governo repubblicano fino alla morte; al ritorno degli austriaci conosce la prigione per quasi un anno: indebolito da questa esperienza, si ritira dalla vita pubblica e muore a Milano il 24 agosto del 1803.

Le opere

Gli argomenti preferiti dalla ricerca scientifica del Fontana sono soprattutto ispirati dalle pubblicazioni di Eulero, il geniale matematico suo contemporaneo verso il quale non perde occasione di manifestare la propria stima: l'analisi infinitesimale nella forma di serie, integrali, l'algebra dei complessi e la geometria differenziale con lo studio di varie curve e superfici; soprattutto l'applicazione, cara al Padre Gregorio, della scienza esatta a numerosi e sempre vari campi del mondo fisico: meccanica, idrodinamica, pressione atmosferica, astronomia, ottica e poi pressione sanguigna, meccanica animale e via elencando. Il suo stile si distingue generalmente per le caratteristiche di semplicità e chiarezza, dovute ad una costante volontà di rendere agevole la comprensione al lettore, e per la precisione meticolosa che a volte lamenta in autori anche importanti come Newton, Condorcet, Lagrange; le sue applicazioni della matematica alla fisica rimangono a livello puramente teorico a causa della vita ritirata che gli permette di conoscere le scienze naturali solo dalle letture e non da esperienze di laboratorio; si interessa infine ad alcuni periodi ed aspetti della storia della matematica.

Opere di Gregorio Fontana

Analyseos Sublimioris Opuscula, Venezia, Simone Occhi, 1763; *De Litterarum Fatis*, Pavia, Giuseppe Bolzani, 1770; *Delle Altezze Barometriche e di alcuni Insigni Paradossi relativi alle Medesime, con alcune Riflessioni Preliminari intorno all'applicazione delle Matematiche alla Fisica*, Pavia, Giuseppe Bolzani, 1771; *Dissertazione idrodinamica sopra il quesito: cercar la cagione, per la quale l'acqua...*, Pavia, Giuseppe Bolzani, 1775, e Mantova, Alberto Pazzoni, 1775; *Disquisitiones Physico-Mathematicae, nunc primum editae*, Pavia, Tip. del Monast. S. Salvatore, 1780; *Ricerche sopra diversi punti concernenti l'Analisi Infinitesimale e la sua applicazione alla Fisica*, Pavia, Baldassarre Comino, 1793.

Articoli inseriti in Periodici e Riviste Scientifiche

Negli *Atti dell'Accademia di Siena*: undici saggi nel tomo V, 1774; cinque nel tomo VI, 1781. Nel *Bode's Astron. Jahrbuch*: un saggio nel 1779, due nel 1783. Partecipa al *Prodromo della nuova Enciclopedia Italiana*, Siena, Pazzini Carli e figli, 1779, per la voce «Anatocismo». Nelle *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze*, Verona: tre saggi nel tomo primo, 1782; quattro nel secondo, 1784; due nel terzo, 1786; cinque nell'ottavo, 1799; tre nel nono, 1802. Nella *Biblioteca fisica d'Europa*, Pavia: un saggio nel tomo settimo, 1789; uno nell'ottavo, 1789; due nel nono, 1789; uno nel diciottesimo, 1790; uno nel diciannovesimo, 1791. Nel *Giornale Fisico-Medico di Pavia*: un saggio nel tomo primo, 1792; due nel terzo, 1792; uno nel quarto, 1792. Negli *Avanzamenti di Medicina e Fisica*, Pavia: quattro saggi con dedica a Napoleone nel tomo terzo, 1796. Nelle *Mémoires de l'Académie des Sciences, Littérature et Beaux-Arts de Turin*: cinque saggi nella Parte I dell'anno XII, 1803.

Opere di cui cura la stampa o la traduzione o che contengono sue appendici:

A. de Moivre: *La dottrina degli Azzardi applicata ai problemi della probabilità della vita, delle pensioni vitalizie, reversioni, tontine ecc.*, Milano, Giuseppe Galeazzi, 1776; L. Eulero: *Saggio di una difesa della divina rivelazione*, Pavia, Giuseppe Bolzani, 1777; G. Atwood: *Compendio del corso di lezioni di Fisica Sperimentale*, Pavia, Tip. del Monast. S. Salvatore, 1781; A. della Decima: *De trium corporum celeberrimo problemate Mathematica Inquisitio*, Pavia, Tip. del Monast. S. Salvatore, 1782; C. Bossut: *Trattato elementare di Idrodinamica*, Pavia, Tip. del

Monast. S. Salvatore, 1785; G. L. Mosheim: *Dissertazione sopra l'Opera di Origene contro Celso*, Pavia, Galeazzi, 1786; L. Eulero: *Institutiones Calcoli Differentialis*, Pavia, 1787; C. Bossut: *Trattato elementare di Meccanica*, Pavia, Tip. del Monast. S. Salvatore, 1788; A. Lotteri: *Principj fondamentali del Calcolo Differenziale e Integrale appoggiati alla dottrina de' limiti*, Pavia, Tip. del Monast. S. Salvatore, 1788; *Ragionamenti del sig. di Sherlock vescovo di Londra*, Milano, 1789; G. Hill: *Saggio sopra i principi della Composizione Storica e loro applicazione alle Opere di Tacito*, Pavia, Pietro Galeazzi, 1789; L. Mascheroni: *Adnotationes ad Calculum Integralem Euleri in quibus nonnulla problemata ad Eulero Proposita resolvuntur*, Pavia, Pietro Galeazzi, 1790, 1792; J. E. Smith: *Discorso preliminare agli Atti della Società Linneana di Londra sull'origine e progresso della Storia Naturale, e più particolarmente della Botanica*, Pavia, Baldassarre Comino, 1792; A. Lotteri: *Memoria sulle Curve Parallele*, Pavia, Baldassarre Comino, 1792; Abate Marie: *Lezioni elementari di Calcolo Differenziale ed Integrale*, Pavia, Baldassarre Comino, 1793; J. Swift: *Sermone sul martirio del Re Carlo I, detto nella Chiesa di S. Patrizio di Dublino il dì 30 Gennajo 1726*, Pavia, Baldassarre Comino, 1793 o 1794; A. Young: *L'Esempio della Francia, avviso e specchio all'Inghilterra*, Pavia, Baldassarre Comino, 1794; C. Bossut: *Saggio sulla Storia generale delle Matematiche*, Milano, Nobile e Tosi, 1802-1803.

Bibliografia

Raramente Gregorio Fontana è stato oggetto di studi particolari, fossero essi di argomento storico, biografico, scientifico o riguardanti le sue corrispondenze: quelli esistenti hanno avuto origine soprattutto in Lombardia a causa della sua attività nell'Ateneo pavese e delle vicende storiche che hanno sconvolto l'ultimo decennio della vita del matematico; ulteriori notizie si debbono ricercare nei più numerosi studi riguardanti personaggi a lui vicini, così come la pubblicazione di sue lettere è più frequente in raccolte di altri scienziati che in pubblicazioni create appositamente. Studi scientifici sui suoi contributi al progresso delle matematiche, poi, sono quasi assenti ed attendono di essere svolti, rendendo il matematico Fontana un personaggio ancora da scoprire completamente.

Sulla vita in generale e su aspetti particolari del personaggio

Adamo Chiusole: *Notizie antiche e moderne della Valle Lagarina*, ristampa di un originale del 1787, A. Forni ed., 1980; G. Savioli: *Elogio* *di Gregorio Fontana*, Pavia, Bolzani, 1804; *Biographie universelle ancienne et moderne*, Paris, Michaud, 1852; *Metodo per imparare la logica e la metafisica del celebre prof. Gregorio Fontana*, L'Istruzione Pubblica, n. 1, Milano, 1865; C. Botta: *Storia d'Italia, dal 1789 al 1814*, Torino, 1852; Corradi: *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia*, Pavia, 1877-78; C. de Festi: *Della nobile famiglia del già principato di Trento, de' Fontana, e più specialmente di Felice e Gregorio*, Giornale Araldico, anno XIV, n. 2 e 3, Pisa, 1886; C. Adami: *Nelle onoranze centenarie di Felice e Gregorio Fontana scienziati pomarolesi del secolo XVIII*, Rovereto, U. Grandi, 1905; F. Salveraglio: *Gregorio Fontana, come bibliotecario*, Archivio Trentino, anno XIX-XX, 1904-1905; R. Soriga: *La reazione dei tredici mesi in Lombardia e le sue vittime politiche*, Bollettino della Società Pavese di Storia Patria, Pavia, 1916; Montalcini, Alberti: *Assemblee della Repubblica Cisalpina*, Bologna, 1917; E. Verga: *Il Padre Fontana e i manoscritti di Leonardo*, Raccolta Vinciana, XI, 1920-22; A. Zieger: *Lesbia Cidonia nell'epistolario di Gregorio Fontana*, Pavia, 1927; R. Marcolongo: *Gregorio Fontana*, Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, anno V, serie II, n. 5, Napoli, 1931; L. Bonomi: *Naturalisti, medici e tecnici trentini*, Trento; 1930. A. Zieger: *Gregorio Fontana. Idee e vicende politiche*, contiene F. Massa: *Ultimi giorni di Gregorio Fontana*, Bibl. della Soc. Stor. Subalpina fondata da F. Gabotto, Torino, 1932; G. Penso: *Scienziati italiani e unità d'Italia. Storia dell'Accademia Nazionale dei XL*, Roma, Bardi, 1978; G. M. Rauzi: *Araldica Tridentina*, Trento, Artigianelli, 1987; A. Zambarbieri: *Lumi, Religione, Rivoluzione. Appunti su Gregorio Fontana*, Archivio Storico Lombardo, Giornale della Soc. Stor. Lombarda, Anno CXX, serie 12, vol. 1, 1994; U. Baldini: *Fontana Giovanni Battista Lorenzo*, Dizionario Biografico degli Italiani, Istituto della Enciclopedia Italiana, vol. 48.

Sui contributi matematici

P. Riccardi: *Biblioteca Matematica Italiana*, Milano, Goerlich, 1952; M. Cantor: *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*; G. Loria: *Storia delle Matematiche, dall'alba della civiltà al tramonto del sec. XIX*, Cisalpino-Goliardica, 1950; G. Loria, *Curve piane speciali algebriche e trascendenti, Teoria e Storia*, Milano, Hoepli, 1930; L. Tenca: *Sui manoscritti di Gregorio Fontana*, Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, Rendiconti, classe di Scienze, vol. 90, Milano, 1956.

Pubblicazione di lettere di Gregorio Fontana:

Lettere inedite di illustri italiani nelle scienze e nelle lettere cavate dalla Raccolta di autografi del prof. Damiano Muoni, a cura di F. Berlan, Milano, Gareffi, 1866; *Lettere inedite di XL Illustri Italiani del sec. XVIII. (Nozze Mazzetti- Altenburger)*, Milano, Bravetta, 1836; *Nozze Videsott-Turrini: Cinque lettere di Gregorio Fontana a Carlo Rosmini*, Trento, G. Zippel, 1884; Gino Arrighi: *Gregorio Fontana nella giovinezza di Pietro Franchini*, Studi Trentini di Scienze Storiche, 1967, p. 65-78; Gino Arrighi: *Contributo alla storia della vita scientifica del Settecento. Due lettere inedite di Gregorio Fontana a Jano Planco*, Studi Trentini di Scienze Storiche, 1970, p. 381-384; *Nozze Rossetti- Pegoretti: Alcune lettere di Felice e Gregorio Fontana*, Trento, Seiser, 1873; Corradi: *Memorie e documenti per la storia dell'Università di Pavia*, Pavia, 1877-78; C. Coriselli: *Una Controversia matematica tra Gregorio Fontana e Clemente Baroni Cavalcabò*, Annuario della Scuola Reale Sup. Elisabettina in Rovereto, Rovereto, 1913; C. Adami: *Nelle onoranze centenarie di Felice e Gregorio Fontana scienziati pomarolesi del secolo XVIII*, Rovereto, U. Grandi, 1905.

Analyseos sublimioris opuscula

Nell'autunno del 1760 il venticinquenne Gregorio Fontana si stabilisce da Roma in Senigallia e per la prima volta assume la responsabilità dell'insegnamento col diventare professore di Filosofia e Fisica nel locale Seminario Scolopio (1). Come abbiamo brevemente anticipato, il biennio passato sulla costa adriatica permette al religioso molte conoscenze nei circoli eruditi di Bologna: frequenta infatti personaggi quali Vincenzo Riccati, Francesco Algarotti, Sebastiano Canterzani, Giovanni Cristofano Amaduzzi ed altri che lasciano un'impronta importante nella sua formazione alle scienze e alle lettere e con molti dei quali rimane a lungo in contatto epistolare o professionale; tuttavia lascia il suo segno più di ogni altra sullo scienziato la vicinanza e l'amicizia col conte Fagnani, che lo prende subito in alta stima ed amicizia ed alimenta in lui

(1) In uno dei soggiorni roveretani che intervallano abitualmente la permanenza a Roma, usanza che manterrà per tutta la vita a causa della cagionevole salute e dell'amicizia con molti esponenti della terra d'origine, il Fontana viene accolto nel 1759 nell'Accademia degli Agiati col nome di Eudamio; nel viaggio di ritorno a Roma dopo una di queste vacanze, nell'autunno del 1760 trova, come narra in una lettera al Tartarotti (Senigallia 4 nov.1760) un ordine del suo Padre Provinciale che per motivi di salute lo destina al Seminario Scolopio di Senigallia.

l'imperitura passione per gli studi e la ricerca matematica, scienza che diverrà il principale oggetto di applicazione del suo vasto ingegno fino alla morte.

Giulio Carlo Fagnani (1682-1766), allora già ottantenne, era un matematico dedito alla ricerca nel campo geometrico ed analitico: i risultati del suo lavoro, raccolti da lui stesso nelle *Produzioni Matematiche* (2) incontrarono giudizi altamente positivi allorché sottoposte ai francesi Le Seur e Jacquier e più tardi allo stesso Eulero; era uno scienziato autodidatta, come nello stesso periodo fu Jacopo Riccati, poiché si era formato da solo faticosamente su manuali e trattati di algebra, geometria analitica e analisi, spinto dalla lettura della *Recherche de la Vérité* di N. de Malebranche. Acquistò la stima dei matematici suoi contemporanei, coi quali manteneva assidua corrispondenza non potendoli frequentare di persona data la scelta di vita ritirata; incoraggiò il giovanissimo Lagrange nella pubblicazione della sua prima opera, collaborò al progetto di restauro della cupola di S.Pietro, fu nei decenni della sua maturità forse il maggiore esperto di analisi in Italia; i suoi contributi più notevoli riguardano la geometria classica, l'algebra, l'analisi infinitesimale ed un teorema geometrico che da alcuni storici è visto come una significativa premessa alla teoria degli integrali ellittici sviluppata poi da Eulero, Lagrange, Legendre, Cauchy (3).

L'origine degli *Analyseos Sublimioris Opuscula* si può ricercare nell'influsso e nell'aiuto provenienti da questo anziano e valentissimo matematico, mentre il loro scopo, come si trova in alcune lettere (4), è con grande probabilità quello di mettersi in luce agli occhi del Governatore di Milano Giuseppe Firmian, per poter così essere chiamato a coprire un posto d'insegnamento di maggior prestigio (5); il progetto va a buon fine ed in data 3 marzo 1764 Firmian promuove il Fontana a professore

(2) In due volumi, Pesaro 1750.

(3) *Dizionario Biografico degli Italiani*, Ist. della Enc. Italiana fondata da Treccani; Antonino Drago: *Giulio Carlo Fagnani e i fondatori del calcolo differenziale*, in: *La storia delle matematiche in Italia, Atti del Convegno, Cagliari, 29-30 sett. e 1 ott. 1982*, Bologna, Ed. Monograf., pp. 415-423; Morris Kline: *Storia del Pensiero matematico*, vol. I, pp. 482-489, Torino, G. Einaudi, 1991.

(4) G. Del Turco a G. Fontana (Pisa 6 aprile 1762) sollecita la stampa della *sua opera* così da facilitare l'assunzione in altra cattedra: G. Tartarotti aveva parlato del Fontana al Firmian, che attendeva una sua pubblicazione per saggiarne il valore: lettera del Firmian a Tartarotti, Vienna 18 nov. 1760.

(5) A cui egli aspirava da tempo: nella lettera al Tartarotti, Senigallia 4 nov.1760, lo informa di aspirare ad una cattedra in Siena; Giovanni del Turco, nella lettera scritta da Pisa 6 nov.1762, lo mette al corrente di essere alla ricerca per l'amico di una cattedra a Siena o in altri luoghi.

di Logica e Metafisica a Pavia, agendo all'interno dell'ammodernamento dell'Ateneo Pavese voluto dall'imperatrice Maria Teresa e che coinvolge anche Volta, Scarpa, Spallanzani ed altri grandi nomi della scienza italiana del XVIII secolo.

Gli *Analyseos Sublimioris Opuscula* sono pubblicati nel 1763, in 8° nella stamperia di Simone Occhi della Serenissima Repubblica di Venezia, con il permesso del Padre Generale dell'ordine Giuseppe Maria di S.Giovanni Battista, concesso il 20 marzo 1762, e l'Imprimatur dei riformatori dello Studio di Padova Marco Foscarini, Alvise Mocenigo e Polo Renier, previa approvazione del P. F. Serafino M.ª Maccarinelli inquisitore generale del S. Offizio di Venezia in data 27 aprile 1762 (6). Sono stampati in volume unico di 136 pagine di testo, più 8 di dedica iniziale ed un foglio finale con 6 figure. Dall'analisi dell'intero testo si possono notare numerosi errori nella stampa di formule matematiche, segno probabilmente di poca dimestichezza del tipografo con tale linguaggio. La lingua è quella latina e di questa lingua il Fontana dimostra una buona dimestichezza soprattutto nella dedica d'inizio, dove lo stile è molto ricercato come vuole il periodo storico; sono usate, naturalmente, alcune parole non appartenenti al vocabolario classico e che riguardano termini scientifici moderni.

Nei manoscritti di Gregorio Fontana conservati alla Biblioteca Nazionale di Firenze (7), vol. 53, pp. 82-177, si trova la versione originale degli *Opuscula* scritta a mano dall'autore. Confrontata con il testo dato alle stampe, si riscontra una ventina di correzioni portate a mano dal Fontana; generalmente non sono di molta importanza, tranne una che è forse motivo di curiosità riportare:

Alla pagina iii, proprio nelle prime righe della Dedica, si trovava:

> *[..] verbis [..] quibus Philosophus Alembertius Virum ingenii gloria praeclarum, et Generis antiquitate spectatum Augustinum Laumellinum, qui* **nunc** *in Januensi Republica clavum* **tenet**, *nuper alloquebatur;*

poi è stato corretto nel manoscritto, e quindi stampato, in questa

(6) Come si trova alle pag. 135 e 136 degli *Opuscula*.

(7) Gregorio Fontana, *Scritti Vari*; Palat. 1197. Gli 81 volumi contengono le versioni originali di sue opere pubblicate, trascrizioni, riassunti e traduzioni ad uso personale di scritti di altri matematici suoi contemporanei, specialmente Eulero; appunti presi affrettatamente, bozze inedite ed alcune lettere da lui ricevute in diverse epoche della sua vita. Fino a qualche decennio fa i volumi erano attribuiti a Felice Fontana (ed effettivamente contengono poche sue pagine) probabilmente a causa del fatto che alla morte di Gregorio i suoi averi passarono al più celebre fratello; la morte di questi, nel 1805, portò l'eredità di entrambi alla sorella Teresa, che morì suicida a Milano qualche anno dopo: questi spostamenti avrebbero ingenerato la confusione e la probabile perdita di ulteriori carte del matematico.

forma:

[..] verbis [..] quibus Philosophus Alembertius Virum ingenii gloria praeclarum, et Generis antiquitate spectatum Augustinum Laumellinum, qui ***nuper*** *in Januensi Republica clavum* ***tenebat,*** *nuper alloquebatur;*

Sapendo che Agostino Lomellini (1709-1791) fu doge di Genova dal 1760 al 1762, cioè proprio mentre il Fontana scriveva gli *Opuscula*, si può dedurre che questi abbia apportato la correzione avendo saputo che l'opera sarebbe stata data alle stampe nel 1763, quando il Lomellini già sarebbe decaduto dalla carica.

Diamo una descrizione del contenuto scientifico dei tre opuscoli con le parole di R. Marcolongo ([8]):

Nel primo si danno, anteriormente a V. Riccati, le quattro formule di riduzione degli integrali del prodotto di una potenza di $\sin\varphi$ *per una potenza del coseno; il secondo contiene una nuova dimostrazione del teorema di R. Cotes e la sua elegante applicazione alla integrazione della funzione* $\frac{x^n}{\left(x^m+a^m\right)}$ *; il terzo tratta una questione di geometria differenziale.*

Unica recensione matematica che si sia potuta trovare è quella di M. Cantor ([9]), che del Primo Opuscolo scrive quanto segue:

Lacroix notò che alcuni integrali, come per esempio $\int x^{m-1}dx\left(a+bx^n+cx^{2n}+\ldots\right)^{\frac{\mu}{\nu}}$ *accettano formule di ricorsione, che [..] riconducono l'integrale ad altri simili. Si trovano anche formule ricorsive negli studi di Fontana, Lorgna e Frisi.*

Ancor prima delle pubblicazioni di Riccati, il Fontana dedicò il suo primo Opuscolo alla risoluzione dei quattro integrali seguenti, che, a suo dire, «per quanto ne so nessuno fino a questo momento ha trattati»:

$$\int\frac{\text{sen}^n\varphi}{\cos^m\varphi}d\varphi\ ,\ \int\frac{\cos^n\varphi}{\text{sen}^m\varphi}d\varphi\ ,\ \int\text{sen}^n\varphi\cos^m\varphi d\varphi\ ,\ \int\frac{d\varphi}{\text{sen}^n\varphi\cos^m\varphi}\ ;$$

qui m e n rappresentano numeri positivi, interi o fratti. Fontana premette quattro formule di ricorsione che mettono $\int\frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^p}$ *in relazione con*

$$\int\frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}}\ ,\ \int\frac{z^{n-m}dz}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}}\ ,\ \int\frac{z^{n+m}dz}{\left(1+bz^m\right)^{p+1}}\ ,\ \int\frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^{p+1}}\ .$$

Considera gli integrali dopo aver operato la sostituzione $x=\cos\varphi$*, così si può calcolare l'integrale dopo aver cambiato i valori di m, n fino a raggiungere integrali risolubili. Se m, n sono interi il Fontana trova soluzioni complete, non così se m, n non sono interi, risolvendo solo alcuni casi di questo tipo.*

Riguardo al Secondo Opuscolo, l'autore tedesco scrive:

([8]) Roberto Marcolongo: *Gregorio Fontana*, Rivista di Fisica, Matematica e Scienze naturali, anno V, serie II, n. 5, Napoli, 1931.

([9]) Moritz Cantor: *Vorlesungen ueber Geschichte der Mathematik*, pag. 476-477; 710; 723; 725; la traduzione delle parti citate è a cura dell'autore.

L'integrazione di funzioni razionali era stata già risolta da Leibniz e Johann Bernoulli. Rimasero da enunciare solo metodi di integrazione nuovi e più eleganti e da trattare alcuni casi speciali. Di Fontana abbiamo una nuova dimostrazione dell'enunciato di Cotes e l'applicazione di questo risultato al calcolo dell'integrale $\int \frac{z^n dz}{(z^m \pm a^m)^r}$.

Per il Terzo Opuscolo, il Cantor spende molte più righe, ripercorrendo l'intero procedimento del Fontana con l'aiuto di disegni e spiegazioni dettagliate.

Dedica

Gli Opuscoli sono dedicati a Crescentino di Baviera ([10]) (1737, 1786) ciambellano, poeta ed arcade, futuro generale e consigliere intimo di Stato del duca Ercole III d'Este ([11]). L'antichissima famiglia Baviera, che fa risalire le sue radici all'omonimo regno germanico, trova il capostipite in Rodolfo (1314) fratello di Ludovico II imperatore di Germania; per discordie familiari, il ramo di Rodolfo ripara in Italia ad Asti, e si sposta successivamente a Senigallia nel 1489, dove trova sua dimora definitiva; i suoi esponenti, dal sec. XIV al XX, sono stati spesso al servizio dei Papi, ricevuti alcuni nel S. M. Ordine di Malta, altri occupati nella politica presso la Repubblica di Venezia, i Savoia o altri ducati italiani minori; Augusto (m. 1910) fu fondatore e direttore dell'Osservatore Romano; la stirpe ha il titolo di Marchese per antichissimo uso e quello di Marchese di Montaldo per diploma del duca Carlo Emanuele di Savoia dal 1665. È nominato inoltre, in una citazione di d'Alembert riportata dall'autore, il genovese Agostino Lomellini ([12]) (1709- 1791): di antica e nobile famiglia commerciante di probabile origine lombarda, Agostino fu ambasciatore in Francia dal 1739 al 1742, fu il sesto (dal 1760 al 1762) di sette dogi genovesi di questa stirpe, è

([10]) Le notizie riguardo alle persone citate in questa parte sono tratte da: *Enciclopedia Storico- Nobiliare Italiana*, promossa e diretta dal marchese Vittorio Sgreti; Milano 1928.

([11]) Ercole III d'Este, 1727-1803; ultimo duca di Modena, Reggio e Mirandola, poco amato dal suo popolo, fuggirà a Venezia in occasione dell'arrivo delle armate francesi nel 1796.

([12]) Al quale sarà dedicata anche la traduzione dall'inglese, fatta dal Fontana e pubblicata in Pavia, dell'opera di John Hill *Saggio sopra i principi della Composizione Storica e loro applicazione alle Opere di Tacito*, Galeazzi, 1789, arricchita di un'appendice dello stesso Fontana.

ricordato tra l'altro per aver trattato nel 1746 col generale dell'esercito austriaco Adorno Botta.

La Dedica al Baviera mostra una conoscenza personale col quasi coetaneo marchese di Montaldo e la gratitudine per il favore col quale testimonia di essere trattato il matematico. Gregorio sottolinea in queste pagine inizialmente come sia soprattutto l'amicizia a legare le due persone ([13]):

> *I più grandi geni dell'Antichità mettevano il nome dei loro amici alla testa delle loro opere, perché un amico era per loro più caro di un protettore.*
>
> *I testimoni di questi fatti sono abbondantissimi [..] soprattutto io, che non occupo l'ultimo posto tra i Tuoi amici; infatti proprio secondo la mia aspirazione mi è capitato di vivere assai in familiarità con Te che precedentemente ammiravo e veneravo da lontano.*

In seguito elenca i pregi e le buone qualità del dedicatario:

> *L'acuto e sottilissimo ingegno, la vivace intuizione della mente, l'ammirevole prontezza della memoria nelle quali sei avanzato a tal punto da poter trattare elegantemente discussioni filosofiche alquanto difficili.*
>
> *Che potrei dire di uno studio letterario poetico alquanto adorno, nel quale tanto mirabilmente eccelli da sembrare che Tu sia stato educato in grembo alle Muse?*
>
> *Che dirò ancora della soavità dei Tuoi costumi, con la quale hai legato a Te gli animi di tutti al punto che non abbiamo nulla di più antico della Tua amicizia e quando Ti troverai alla presenza di tutti, di tutti Ti sembrerà di essere la delizia?*
>
> *Che dirò della generosità e della munificenza quasi singolare con la quale sollevi tanto benevolmente dalle miserie gli uomini nelle sofferenze e afflitti dalla povertà, e non neghi nulla a chi chiede, anzi li esorti a chiedere?*

Infine nelle ultime righe si augura che il dono di questi piccoli trattati sia accettato di buon animo:

> *Incoraggiami con la Tua umanità, della quale tutta la Tua vita è formata. Dunque sii giustamente soddisfatto di questa piccola opera, qualunque sia. Ti affido e ti offro tutto me stesso e il mio libro, e con questa speranza, che Tu sia sempre mosso dalla Tua virtù, e non dalla Sorte.*

([13]) La presente citazione e le seguenti sono tratte dalle pp. III-VIII dell'opera. La traduzione è a cura dell'autore.

OPUSCOLO I
DELL'INTEGRAZIONE DI ALCUNE FORMULE TRIGONOMETRICHE[1]

Scrive il Fontana[2]:

Aggirandomi pochi giorni fa nei Commentari della Regia Accademia di Berlino, mi imbattei nell'eccellente Dissertazione dell'immortale Eulero là pubblicata: "Recherches plus exactes sur l'effet des Moulins à Vent"..[3]

nella quale l'attenzione del Fontana viene attratta dal fatto che nella risoluzione dei Problemi n. 8 e n. 11 sette interessanti integrali vengono utilizzati dal matematico svizzero senza dimostrazione. In apertura del primo opuscolo, il Fontana pensa così di proporne una sua, non tanto per provarne la verità, quanto per preparare il lettore ai metodi di integrazione che gli saranno sottoposti in seguito[4]. Le sette formule seguenti:

1) $\int \frac{d\omega}{\cos\omega} = \ln\mathrm{tg}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right)$

2) $\int \frac{d\omega}{\cos^3\omega} = \frac{\mathrm{sen}\,\omega}{2\cos^2\omega} + \frac{1}{2}\ln\mathrm{tg}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right)$

3) $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}^2\omega\cos\omega} = \ln\mathrm{tg}\left(45° + \frac{\omega}{2}\right) - \frac{1}{\mathrm{sen}\,\omega}$

4) $\int \frac{d\omega\cos\omega}{\mathrm{sen}^4\omega} = -\frac{1}{3\mathrm{sen}^3\omega}$

5) $\int \frac{d\omega\cos^3\omega}{\mathrm{sen}^6\omega} = -\frac{1}{5\mathrm{sen}^5\omega} + \frac{1}{3\mathrm{sen}^3\omega}$

6) $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} = \ln\mathrm{tg}\frac{\omega}{2}$

7) $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}^m\omega} = \frac{m-2}{m-1}\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}^{m-2}\omega} - \frac{\cos\omega}{(m-1)\mathrm{sen}^{m-1}\omega}$

vengono quindi velocemente ed agevolmente dimostrate per mezzo di alcuni semplici lemmi di di integrazione e di carattere trigonometrico.

Di maggiore interesse sono tuttavia gli Scolia[5] che seguono le prime sei dimostrazioni poiché, se supposti logicamente corretti, sono a nostro avviso di difficile interpretazione matematica; sembra al contrario più probabile il fatto che il Fontana non avesse a quel tempo ancora chiaro il concetto di integrabilità di una funzione e di integrale definito[6]. Riassumendo come esempio il cammino che percorre nello Scolio I, si può dire

---

1 *De Formularum quarundam Trigonometricarum Integratione*, pp. 1-60.

2 In apertura del Primo Opuscolo, p. 1. Le citazioni dagli *Analyseos Sublimioris Opuscula* sono tradotte dall'autore.

3 *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* to. 12 (1756), pp. 165-234.

4 *Ma è meglio risolvere prima le formule Euleriane, affinché comincino a risplendere le molteplici vie, e metodi di pervenire alla medesima verità* . p. 2.

5 Si trovano tra la p. 5 e la p. 8.

6 Si tenga presente che nel corso del Settecento praticamente tutti i matematici trattavano l'integrale come semplice inversa della derivata o del differenziale dy. L'esistenza dell'integrale non venne mai posta in dubbio poiché esso veniva trovato in maniera esplicita nella maggior parte delle applicazioni di quel secolo. Questo fatto, tra l'altro, diede modo di discutere a lungo sui logaritmi delle quantità negative, poiché questi venivano sovente incontrati nell'integrazione di formule del tipo $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$. Sull'argomento si trova anche

che il giovane Gregorio cerchi una primitiva per la formula $\frac{1}{\cos\omega}$ e riesca correttamente ad individuarla in $\ln \mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)$ alla quale andrebbe aggiunta una costante generica C. Quindi sembra che determini C=0 considerando l'integrale definito $\int_0^\alpha \frac{d\omega}{\cos\omega} = \left[\ln \mathrm{tg}\left(45^\circ + \frac{1}{2}\omega\right)\right]_0^\alpha$ con $\alpha = 0$. Anche tralasciando il fatto di non potersi spiegare il motivo di questa scelta, bisogna rimarcare che il ragionamento non è corretto quando viene ripetuto negli Scolia III, IV, V, VI poiché in zero le funzioni considerate non sono integrabili, e non si può quindi assumere quel numero come estremo di integrazione.

Si può ancora aggiungere una considerazione: nella memoria di Eulero citata sopra si può notare come l'insigne matematico svizzero illustri un ragionamento simile (ma corretto) nel momento in cui, applicando i medesimi integrali ai suoi calcoli, scrive:

> $\int \frac{d\omega \cos\omega}{\mathrm{sen}^4 \omega}$ *è uguale a* $-\frac{1}{3\,\mathrm{sen}^3 \omega} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ *dopo aver aggiunto la giusta costante, affinché l'integrale svanisca quando* $\mathrm{tg}\,\omega = \sqrt{2}$

forse il più modesto italiano voleva ripetere il procedimento, aggiungendo la giusta costante affinché l'integrale svanisse quando $\omega = 0$. Traccia di questo sarebbe la frase nello Scolio III:

> *Supponiamo infatti che tali formule siano di tal fatta, che allo scomparire dell'arco esse stesse spariscano, come intanto si sarà osservato.*[7]

Come ultimo esempio lo Scolio VI, riferito alla formula $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} = \ln \mathrm{tg} \frac{1}{2}\omega + \varphi$, riporta:

> *Fatto* $\omega = 0$, *si ottiene* $\varphi = -\ln 0 = (-1)\cdot(-\infty) = \infty$; *e particolarmente* $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}\,\omega} = \infty$.[8]

A questo punto Gregorio Fontana chiarisce lo scopo che questo primo Opuscolo si prefigge, cioè fornire un metodo di integrazione per le quattro formule trigonometriche

> *massimamente universali, che riuniscono in esse tutte le altre:*

I $\int \frac{d\omega\, \mathrm{sen}^n \omega}{\cos^m \omega}$ *II* $\int \frac{d\omega \cos^n \omega}{\mathrm{sen}^m \omega}$

III $\int d\omega\, \mathrm{sen}^n \omega \cos^m \omega$ *IV* $\int \frac{d\omega}{\mathrm{sen}^n \omega \cos^m \omega}$

una memoria del Fontana del 1782 (inserita nelle *Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze*, to. I, Dionigi Ramanzini, Verona 1782) dal titolo *Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gli immaginari*, nella quale egli si inserisce nei conflitti di opinione in questo campo tra contemporanei della levatura di Leibniz e Bernoulli, o Eulero e D'Alembert.

7 Alla p. 6.

8 Alla p. 8.

E nelle quali gli esponenti m, n sono numeri positivi, negativi, interi, fratti, e anche nulli;[9]

quattro formule canoniche da nessuno dei geometri fino ad ora, che io sappia, integrate.[10]

In realtà, come si potrà osservare col procedere della trattazione, il matematico raggiungerà pienamente lo scopo nel caso di esponenti interi, o nulli, mentre in quello di m, n frazionari il risultato verrà trovato solamente in alcuni casi particolari.

Come ha già cominciato a fare nella risoluzione delle formule di Eulero, il Fontana opera per prima cosa il seguente cambio di variabile:

$$x = \cos\omega\,, \quad \sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}\omega$$

per mezzo del quale trasforma le quattro formule centrali nelle quattro seguenti:

$$I \quad \int \frac{-dx\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{x^m} \qquad II \quad \int \frac{-dx\,x^n}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m+1}{2}}}$$

$$III \quad \int -x^m dx\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \qquad IV \quad \int \frac{-dx}{x^m\left(1-x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

che, come si vede, non sono altro che la medesima formula $\int -x^p(1-x^2)^{q/2}dx$ (1) considerata con $p,q \in Z$, come del resto le prime quattro sono sempre la stessa $\int d\omega \operatorname{sen}^n\omega\cos^m\omega$, con $n,m \in Z$ invece che $n,m \in N$.

Quindi vengono introdotti quattro Teoremi che saranno utilizzati continuamente nel resto del trattato, Teoremi che in fondo sono formule atte a ridurre od aumentare alcuni esponenti della formula (1) vista sopra e che valgono per valori razionali, positivi e negativi, delle costanti presenti nelle formule, con le normali limitazioni dovute alla presenza di denominatori:

Teorema I
$$\int \frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^p} = -\frac{z^{n+1}}{(p-1)m\left(1+bz^m\right)^{p-1}} + \frac{(p-1)m-n-1}{(p-1)m}\int \frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}}$$

<u>*Dimostrazione*</u> Supposto $\int \frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^p} = \frac{M(z)}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}} + c\int \frac{z^h dz}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}}$, con $M(z)$ funzione di z, c ed h costanti, differenziando si otterrà:

$$\frac{z^n dz}{\left(1+bz^m\right)^p} = \frac{dM\cdot\left(1+bz^m\right)-(p-1)\cdot mbz^{m-1}dzM}{\left(1+bz^m\right)^p} + \frac{cz^h dz}{\left(1+bz^m\right)^{p-1}}$$

cioè
$$bz^m dM + dM - (p-1)\cdot mbM(z)z^{m-1}dz + cbz^{h+m}dz + cz^h dz - z^n dz = 0 \qquad (2)$$

Questa equazione è verificata se $M(z) = az^r$ e si trasforma nella seguente:

$$rbaz^{m+r-1} - (p-1)mbaz^{m+r-1} + cbz^{h+m} + raz^{r-1} + cz^h - z^n = 0 \qquad (3)$$

nella quale r ed h possono essere determinati imponendo che i primi tre termini dell'equazione contengano la variabile z alla medesima potenza, e gli ultimi tre lo stesso; si otterrà $r = n+1$, $h = n$ e l'equazione

[9] Alla p. 2.
[10] Alla p. 8.

$$((n+1)ba-(p-1)mba+cb)z^{m+n}+((n+1)a+c-1)z^{n}=0$$

donde, uguagliati i coefficienti a zero, risulta $a=\frac{1}{(p-1)m}$, $c=\frac{(p-1)m-n-1}{(p-1)m}$, $M(z)=az^{r}=\frac{z^{n+1}}{(p-1)m}$ e la tesi è dimostrata.

Teorema II $$\int\frac{z^{n}dz}{(1+bz^{m})^{p}}=-\frac{z^{n-m-1}}{bm(p-1)(1+bz^{m})^{p-1}}+\frac{n-m+1}{bm(p-1)}\int\frac{z^{n-m}dz}{(1+bz^{m})^{p-1}}$$

<u>*Dimostrazione*</u> L'equazione (2) incontrata nella precedente dimostrazione sussiste ancora nel caso che la funzione $M(z)=az^{r}$ abbia un esponente diverso da quello trovato sopra; così si possono determinare r ed h imponendo che nell'altra equazione (3) i primi quattro termini contengano la stessa potenza di z, e lo stesso i due rimanenti. Si otterrà $r=n-m+1$ e $h=n-m$; ora dall'equazione ottenuta

$$[(n-m+1-(p-1)m)ba+cb-1]z^{n}+[(n-m+1)a+c]z^{n-m}=0$$

uguagliati i coefficienti a zero, si ottiene $a=-\frac{1}{bm(p-1)}$, $c=\frac{n-m+1}{bm(p-1)}$ e quindi la tesi.

Teorema III $$\int\frac{z^{h}dz}{(1+bz^{m})^{r}}=\frac{z^{h+1}}{(h+1)(1+bz^{m})^{r}}+\frac{bmr}{h+1}\int\frac{z^{h+m}dz}{(1+bz^{m})^{r+1}}$$

<u>*Dimostrazione*</u> Si ottiene dalla formula del Teorema II isolando l'integrale a destra e ponendo $n-m=h$ e $p-1=r$.

Teorema IV $$\int\frac{z^{h}dz}{(1+bz^{m})^{r}}=\frac{rm}{rm-h-1}\int\frac{z^{h}dz}{(1+bz^{m})^{r+1}}-\frac{z^{h+1}}{(rm-h-1)(1+bz^{m})^{r}}$$

<u>*Dimostrazione*</u> Come sopra, si può isolare l'integrale a destra nella formula del Teorema I e porre $n=h$, e $p-1=r$.

In alternativa alle dimostrazioni del Fontana si può notare che la formula del Teorema III è anche l'applicazione dell'integrazione per parti all'integrale $\int z^{h}\frac{1}{(1+bz^{m})^{r}}dz$; da questo si può poi ottiene con facilità il Teorema I. In nessun'altra parte dello scritto è nominata od utilizzata l'integrazione per parti mentre per scopi simili si fa spesso uso di metodi, come quello della dimostrazione del teorema I, che "indovinano" la forma che si deve andare a trovare e che del metodo per parti sfruttano in qualche modo la stessa radice.

Il Teorema I (col Teorema IV che da questo è generato) si può ricavare in maniera alternativa integrando per parti $\int z^{n}\frac{1}{(1+bz^{m})^{p-1}}dz$ e vedendo che risulta uguale ad $\frac{z^{n+1}}{(n+1)(1+bz^{m})^{p-1}}+\frac{(p-1)m}{n+1}\int\frac{z^{n}bz^{m}dz}{(1+bz^{m})^{p}}$; si nota poi l'uguaglianza $\frac{z^{n}bz^{m}}{(1+bz^{m})^{p}}=\frac{z^{n}}{(1+bz^{m})^{p-1}}-\frac{z^{n}}{(1+bz^{m})^{p}}$ che sostituita nella precedente porta a:

$$\int z^{n}\frac{dz}{(1+bz^{m})^{p-1}}-\frac{(p-1)m}{n+1}\int\frac{z^{n}dz}{(1+bz^{m})^{p-1}}=\frac{z^{n+1}}{(n+1)(1+bz^{m})^{p-1}}-\frac{(p-1)m}{n+1}\int\frac{z^{n}dz}{(1+bz^{m})^{p}}$$

dalla quale isolando l'integrale a destra si ricava la formula cercata.

Segnaliamo per inciso che il Fontana fa uso del Teorema III per dimostrare la formula $\int \frac{z^{\theta\mu} dz}{(1+bz^{\mu})^{\gamma+\theta}} = \frac{-z^{(\theta-1)\mu+1}}{b\mu(\gamma+\theta-1)(1+bz^{\mu})^{\gamma+\theta-1}} + \frac{(\theta-1)\mu+1}{b\mu(\gamma+\theta-1)} \int \frac{z^{(\theta-1)\mu} dz}{(1+bz^{\mu})^{\gamma+\theta-1}}$ che Eulero utilizza nella memoria *Constructio Aequationis Differentialis* $ax^{n}dx = dy + yydx$ [11]: formula che è anche possibile ricavare, di nuovo per parti, dalla $\frac{z^{(\theta-1)\mu+1}}{b\mu(\gamma+\theta-1)(1+bz^{\mu})^{\gamma+\theta-1}}$ ma della quale il tedesco non riferisce la dimostrazione.

Terminata la parte introduttiva, Gregorio Fontana intraprende la risoluzione delle quattro formule generali di integrazione di una potenza del seno per una potenza del coseno. Nei problemi I, II, III, IV egli esamina le formule nel caso di esponenti esclusivamente interi. Subito si nota che se vi sono esponenti negativi in una formula, essa si trasforma in una delle rimanenti; per questo i problemi possono essere affrontati singolarmente tenendo conto dei soli esponenti positivi o nulli[12].

Problema I Integrare la formula I $\frac{d\omega \operatorname{sen}^{n} \omega}{\cos^{m} \omega}$.

Soluzione Nel primo problema, e solo in questo, l'autore propone due differenti procedure di risoluzione, la prima semplice da esporre, ma di difficoltosa applicazione, la seconda lenta sia nell'esposizione che nell'applicazione, ma in compenso più semplice e generale. La prima:

Con la sostituzione già indicata si trova innanzitutto che la formula da integrare diventa $\frac{-dx(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{x^m}$. Il Fontana nota subito che se n è dispari, $\frac{n-1}{2}$ è un numero intero, quindi $\frac{(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}}{x^m}$ risulta essere un polinomio con esponenti interi positivi o negativi, immediatamente integrabile. Se invece n è pari, il Fontana consiglia di aggirare l'ostacolo della quantità radicale $(1-x^2)^{\frac{n-1}{2}}$ con la sostituzione $\sqrt{1-x^2} = 1-zx$ che è possibile utilizzare poiché $y = \sqrt{1-x^2}$ esiste per $-1 \le x \le 1$ ed assume valori $0 \le y \le 1$; inoltre esiste sempre z, con $-1 \le z \le 1$, tale che $y = 1-zx$; questo metodo, pur funzionando in via teorica in tutti i casi affrontati in questo opuscolo, si rivela molto spesso faticoso e lento, così che il nostro autore non lo nomina più e ne espone uno alternativo, che è la parte più originale, quindi importante, di questo primo trattato. Eccolo riassunto:

> *Ma quando questo metodo comune di integrare, dove* $\frac{n-1}{2}$ *è frazionario, di usare* $\sqrt{1-x^2} = 1-zx$ *è faticoso, e grandemente fastidioso, è preferibile seguire il metodo seguente*[13].

[11] In *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*, to. 6, 1732-33, pp.124-137, punto 7.

[12] Esponiamo in dettaglio il metodo seguito per risolvere il Problema I omettendo gli altri, analoghi, per brevità.

[13] Alla p. 16.

Si scriva la formula integranda nella forma $-\frac{x^{-m}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}$ (si terrà sempre presente che n è pari), ora:

se $m=0$ la formula diventa $-\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}$; utilizzando il Teorema IV si ottiene:

$$-\int\frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}=\int \mathrm{sen}^n\omega d\omega=\frac{n-1}{n}\int\frac{-dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3-n}{2}}}-\frac{-x}{n\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}=\frac{n-1}{n}\int d\omega\,\mathrm{sen}^{n-2}\omega-\frac{\cos\omega\,\mathrm{sen}^{n-1}\omega}{n}$$

dove la risoluzione dipende dall'integrazione della medesima formula, con l'esponente n diminuito di due; applicando ancora il Teorema IV si trova:

$$\frac{n-1}{n}\int\frac{-dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3-n}{2}}}=\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\int\frac{-dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5-n}{2}}}-\frac{(n-1)x}{n(n-2)\left(1-x^2\right)^{\frac{3-n}{2}}}$$

e quindi $\int d\omega\,\mathrm{sen}^n\omega==\frac{(n-1)(n-3)}{n(n-2)}\cdot\int d\omega\,\mathrm{sen}^{n-4}\omega-\frac{\cos\omega\,\mathrm{sen}^{n-1}\omega}{n}-\frac{(n-1)\cos\omega\,\mathrm{sen}^{n-3}\omega}{n(n-2)}$;

avendo supposto n pari, applicato questo procedimento un numero sufficiente di volte si troverà un integrale del tipo $\int d\omega\,\mathrm{sen}^{n-n}\omega=\int d\omega=\omega+c$ [14];

se $m=1$, la formula assume la forma $\frac{-x^{-1}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}$, che viene mutata in $\frac{u^n du}{1-u^2}$, facilmente risolubile, per mezzo della sostituzione di variabile $\sqrt{1-x^2}=u$ [15];

se $m\geq 2$, applicato il Teorema III si ottiene:

$$\int\frac{-x^{-m}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}dx=\frac{n-1}{1-m}\int\frac{-x^{2-m}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3-n}{2}}}+\frac{x^{1-m}}{(m-1)\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}=\frac{n-1}{1-m}\int\frac{\mathrm{sen}^{n-2}\omega d\omega}{\cos^{m-2}\omega}+\frac{\mathrm{sen}^{n-1}\omega}{(m-1)\cos^{m-1}\omega}$$

applicato lo stesso una seconda volta: $\int\frac{-x^{-m}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}dx=$

$$=\frac{(n-1)(n-3)}{(m-1)(m-3)}\int\frac{-x^{4-m}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5-n}{2}}}+\frac{x^{1-m}}{(m-1)\left(1-x^2\right)^{\frac{1-n}{2}}}-\frac{(n-1)x^{3-m}}{(m-1)(m-3)\left(1-x^2\right)^{\frac{3-n}{2}}}=$$

$$=\frac{(n-1)(n-3)}{(m-1)(m-3)}\int\frac{d\omega\,\mathrm{sen}^{n-4}\omega}{\cos^{m-4}\omega}+\frac{\mathrm{sen}^{n-1}\omega}{(m-1)\cos^{m-1}\omega}-\frac{(n-1)\mathrm{sen}^{n-3}\omega}{(m-1)(m-3)\cos^{m-3}\omega};$$

dunque utilizzando il Teorema III un numero di volte uguale a $\frac{m}{2}$ nel caso di m pari e $\frac{m-1}{2}$ nel caso di m dispari, si troverà l'integrale iniziale dipendere soltanto da

---

14 Per dare un esempio calcoliamo: se $n=2$, $\int d\omega\,\mathrm{sen}^2\omega=\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{2}\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega$

se $n=4$, $\int d\omega\,\mathrm{sen}^4\omega=\frac{3}{8}\omega-\frac{1}{4}\cos\omega\,\mathrm{sen}^3\omega-\frac{3}{8}\cos\omega\,\mathrm{sen}\,\omega$.

15 Notiamo a questo punto come l'autore consideri noti e risolubili *senza alcuna difficoltà* gli integrali del tipo che riportiamo qui sotto:

n dispari: $\int\frac{x^n dx}{1-x^2}=-\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{x^{n-3}}{n-3}-\ldots-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|1-x^2\right|+c$

n pari: $\int\frac{x^n dx}{1-x^2}=-\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{x^{n-3}}{n-3}-\ldots-x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+c$

$\int\frac{x^{-n}dx}{1-x^2}=-\frac{x^{-n+1}}{n-1}-\frac{x^{-n+3}}{n-3}-\ldots-x^{-1}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+c$;

il Fontana non dà mai nell'opera la soluzione di queste formule, bensì le lascia al lettore, mostrando che si tratta di formule piuttosto comuni all'epoca.

$\int\frac{-dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m+1-n}{2}}}$, se m è pari, e da $\int\frac{-x^{-1}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m-n}{2}}}$ se m è dispari; ora:

se $m=n$ risulta $\int\frac{-dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m+1-n}{2}}}=\int d\omega$

se m è pari e $m>n$ si applica il Teorema I fino a che $\frac{m+1-n}{2}$ diventa uguale a $\frac{1}{2}$ e si cade nel caso precedente;

se m è pari e $m<n$, si applica il Teorema IV finché $\frac{m+1-n}{2}=\frac{1}{2}$, come sopra;

se infine m è dispari si opera la sostituzione $\sqrt{1-x^2}=u$ e si trova $\int\frac{-x^{-1}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m-n}{2}}}=\int\frac{u^{-m+1+n}du}{1-u^2}$, che è un integrale già noto al tempo, come riferito in nota più sopra.

Diamo ora un esempio di applicazione di questo metodo nel caso di $n=6$ ed $m=4$:

$$\int\frac{sen^6\omega}{\cos^4\omega}d\omega=-\int\frac{x^{-4}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}dx= \quad \text{[si applichi il teorema III per } \frac{m}{2}=2 \text{ volte]}$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{3x^3}-\frac{5}{3}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x}-5\int\frac{1}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}= \quad \text{[si applichi il teorema IV]}$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}{x^3}-\frac{5}{3}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{x}-\frac{5}{2}x\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1}{3}\frac{\operatorname{sen}^5\omega}{\cos^3\omega}-\frac{5}{3}\frac{\operatorname{sen}^3\omega}{\cos\omega}-\frac{5}{2}\cos\omega\operatorname{sen}\omega+\frac{5}{2}\omega+c$$

e nel caso di $n=4$ ed $m=5$:

$$\int\frac{sen^4\omega}{\cos^5\omega}d\omega=-\int\frac{x^{-5}}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx= \quad \text{[si applichi il teorema III per } \frac{m-1}{2}=2 \text{ volte]}$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^4}-\frac{3}{8}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2}-\frac{3}{8}\int\frac{x^{-1}dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}= \quad \text{[si sostituisca } \sqrt{1-x^2}=u \text{]}$$

$$=\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}{4x^4}-\frac{3}{8}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}}{x^2}+\frac{3}{8}\int\frac{du}{1-u^2}=\frac{1}{4}\frac{\operatorname{sen}^3\omega}{\cos^4\omega}-\frac{3}{8}\frac{\operatorname{sen}\omega}{\cos^2\omega}-\frac{3}{16}\ln\frac{|1-\operatorname{sen}\omega|}{|1+\operatorname{sen}\omega|}.$$

Con metodi ricorsivi analoghi a quello appena esposto, facenti uso dei quattro teoremi introdotti inizialmente, l'autore riesce a risolvere brillantemente i successivi tre problemi, individuando ed esponendo con chiarezza e completezza un metodo generale di risoluzione per gli integrali di formule del tipo $\operatorname{sen}^n\omega\cos^m\omega$ con $n,m\in Z$; analizzando i metodi illustrati nei manuali di analisi più recenti non si trovano molte differenze con questi risultati, e quelle che sussistono sono date dalla maggiore completezza negli scritti moderni (esponenti razionali; esponenti reali), e non da diversità di metodo.

Per le caratteristiche di completezza, accessibilità alla comprensione e semplicità esecutiva questo ed i metodi successivi meritarono all'epoca della loro pubblicazione vari giudizi positivi da parte della comunità matematica italiana; furono poi ricordati anche nel corso del secolo seguente, trovandosi fin nei nostri anni Trenta nominati nell'*Enciclopedia delle Matematiche Elementari e Complementi*, di L. Berzolan, G. Vivanti, D. Gigli[16], un trattato di tecniche analitiche che poneva nell'esposizione una certa attenzione all'aspetto storico degli argomenti considerati.

Nonostante questo non si può certo dar gloria all'ancor giovane autore di aver esplorato nuove regioni matematiche o di avere aperto sentieri insospettati, poiché con ogni probabilità molti matematici sapevano già integrare quelle stesse formule considerate singolarmente; tuttavia il merito del Fontana può essere individuato nell'aver raccolto insieme tutti gli aspetti di questo tipo di problema, considerando tutte le situazioni che si possono presentare con completezza ed esaustività, con buona chiarezza ed ordine nell'esposizione e tali da rendere l'argomento facilmente accessibile a chiunque avesse un minimo di conoscenze nel campo dell'integrazione. Tutto questo soprattutto se si ricorda che il Padre Gregorio aveva allora da poco iniziato a percorrere i terreni dell'Analisi Sublime, condottovi da un grande maestro quale poteva dimostrarsi Giulio Carlo Fagnani ma ancora purtroppo limitato nelle conoscenze nell'ambiente scientifico, conoscenze individuabili probabilmente nei dintorni del Collegio Nazareno di Roma, dal quale si era da poco staccato, e nei salotti colti che aveva l'occasione di frequentare a Bologna. Infine, lo stile espositivo rende merito alla sua appartenenza all'ordine delle Scuole Pie ed è un anticipo di quella vocazione all'insegnamento ed alla divulgazione che lo contraddistinguerà per tutta l'esistenza.

Analizzando criticamente la rimanente parte di questo primo Opuscolo si distingue soprattutto la distanza tra i risultati che l'autore si prefigge nel porre i quattro Problemi e quelli meno lusinghieri che effettivamente riesce a raggiungere. I Problemi prendono in esame gli stessi quattro integrali della sezione precedente, ma con esponenti questa volta frazionari. L'aspetto importante da cogliere è che il Fontana ragiona in queste pagine nel modo inverso a quello che ci si potrebbe aspettare: non parte, infatti, dal testo di un Problema: *Integrare la formula I nell'ipotesi di esponenti frazionari*[17] per poi cercare una o più maniere di risolverlo; al contrario parte dal metodo che ha appena inventato e spiegato e lo applica alla formula in questione per vedere quali risultati esso lo aiuta a raggiungere. In breve tratta questi Problemi come applicazione del suo metodo ricorsivo, quasi come Corollari ai Problemi precedenti.

Mostriamo, per rendere un'idea più precisa, una parte della risoluzione del Problema VI, nella versione originale (in figura) e tradotta in italiano:

Ora per gli altri casi si utilizzi il I Teorema, e sarà:

$$\int \frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{x^{m+1}}{(n-1)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{n-m-2}{(n-1)} \int \frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}$$

---

[16] Pubblicato da Ulrico Hoepli, Milano 1930 (rist. anast., 1950). Si parla degli Opuscoli del Fontana nel vol. I, parte II, p.491, dove si attribuisce a V.Riccati (*Comm. Bonon.*, 5, p. II, p.211) nel 1767 ed a G. Fontana (*Analyseos Subl. Opusc.*, Venezia 1763, pp.1-60) la risoluzione degli integrali di tipo $\int \operatorname{sen}^h x \cos^k x dx$. Alla p.474 dello stesso si dà merito inoltre a J. L. Lagrange (*Oeuvres*, 3, p.461: *Th. Des fonctions; Oeuvres*, 9, p.143) e a G.Fontana (in un'appendice all'opera di A. G. Lotteri: *Principii fondamentali del Calcolo differenziale e integrale appoggiati alla dottrina dei limiti*, Pavia, 1788) di aver indipendentemente effettuato l'estensione della formula di Taylor alle funzioni di più variabili.

[17] Alla p. 42: Problema V.

OPUSCULUM I. 45

PROBLEMA VI.

Formulam II. $\frac{x^m dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}}$ in hypothesi eadem exponentium m, n fractorum integrare.

SOLUTIO

Si m est fractio quaelibet, n numerus impar, fiat $m = \frac{h}{r}$, $x^{\frac{1}{r}} = y$, eritque $\frac{x^m dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{r y^{r+h-1} dy}{\overline{1-y^{2r}}^{\frac{n+1}{2}}}$, quae per notas regulas haud difficile integratur, ut constat. Pro aliis vero casibus adhibeatur I. Theorema, eritque $S \frac{x^m dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}} =$

$$\frac{x^{m+1}}{n-1 \times \overline{1-x^2}^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{n-m-2}{n-1} S \frac{x^m dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n-1}{2}}},$$

&

Fig. 2 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 45. Parte della risoluzione del problema VI.

46 ANALYSEOS SUBLIMIORIS

& $\frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{x^m\, dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n-1}{2}}} =$

$$\frac{\overline{n-m-2}\times x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{\overline{n-m-2}\times\overline{n-m-4}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}}$$

$\int \frac{x^m\, dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n-3}{2}}}$, atque ita ſemper procedendo, uſurpato vicibus h eodem I. Theoremate invenietur $\int \frac{x^m\, dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-1}{2}}} +$

$$\frac{\overline{n-m-2}\times x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{\overline{n-m-2}\times\overline{n-m-4}\times x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{n-5}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-5}{2}}} +$$

$$\frac{\overline{n-m-2}\times\overline{n-m-4}\times\overline{n-m-6}\times x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{n-5}\times\overline{n-7}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-7}{2}}} + \text{\&c.}$$

$$\ldots\ldots + \frac{\overline{n-m-2}\times\overline{n-m-4}\times\overline{n-m-6}\ldots\times\overline{n-m-2h+2}\times x^{m+1}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{n-5}\times\overline{n-7}\ldots\times\overline{n-2h+1}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-2h+1}{2}}} +$$

n - m

Fig. 3 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 46. Parte della risoluzione del problema VI.

OPUSCULUM I. 47

$$\frac{\overline{n-m-2}\times\overline{n-m-4}\times\overline{n-m-6}\times\overline{n-m-8}\ldots\times\overline{n-m-2h}}{\overline{n-1}\times\overline{n-3}\times\overline{n-5}\times\overline{n-7}\ldots\ldots\times\overline{n-2h+1}}$$

$S\dfrac{x^m\,dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n-2h+1}{2}}}$. Ex hujus æquationis inſpectione ſtatim colligitur ſummam inventam eſſe algebraicam, ubi $n-m$ ſit numerus par poſitivus; ſeu $=2h$, quia tunc evaneſcit ultimus æquationis terminus, ſive fracti ſint n, & m, ſive integri; adeoque in hoc caſu $S\dfrac{d\omega\cos\omega^m}{\text{ſin}\,\omega^n}$ invenietur, algebraica expreſſa per ſolos ſinus, & coſinus arcus ω. Liquet præterea,

$S\dfrac{x^m\,dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}}$ eſſe algebraice integrabilem, ubi m ſit $=0$, n ſit numerus par, ex: gr: $=2h$; in hoc enim caſu invenitur

$$S\frac{x^m\,dx}{\overline{1-x^2}^{\frac{n+1}{2}}}=\frac{x}{\overline{n-1}\times\overline{1-x^2}^{\frac{n-1}{2}}}+$$

n—2

Fig. 4 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 47. Parte della risoluzione del problema VI.

$$e \qquad \frac{n-m-2}{(n-1)}\int\frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} = = \frac{(n-m-2)x^{m+1}}{(n-1)(n-3)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{(n-m-2)(n-m-4)}{(n-1)(n-3)}\int\frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n-3}{2}}},$$

e così sempre procedendo, usato lo stesso I Teorema h volte si trova

$$\int\frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{x^{m+1}}{(n-1)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}} + \frac{(n-m-2)x^{m+1}}{(n-1)(n-3)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-3}{2}}} +$$
$$+\frac{(n-m-2)(n-m-4)x^{m+1}}{(n-1)(n-3)(n-5)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-5}{2}}} + \frac{(n-m-2)(n-m-4)(n-m-6)x^{m+1}}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-7}{2}}} + \ldots +$$
$$+\frac{(n-m-2)(n-m-4)(n-m-6)(n-m-8)\ldots(n-m-2h+2)x^{m+1}}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\ldots(n-2h+1)\left(1-x^2\right)^{\frac{n-2h+1}{2}}} +$$
$$+\frac{(n-m-2)(n-m-4)(n-m-6)(n-m-8)\ldots(n-m-2h)}{(n-1)(n-3)(n-5)(n-7)\ldots(n-2h+1)}\int\frac{x^m dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{n-2h+1}{2}}}.$$

Dall'analisi di questa equazione subito si conclude che si trova la somma algebrica, dove $n-m$ sia un numero pari e positivo, cioè sia $n-m=2h$, poiché allora scompare l'ultimo termine dell'equazione, sia che n, m siano fratti, sia che siano interi, e particolarmente in questo caso si trova $\int\frac{d\omega\cos^m\omega}{\operatorname{sen}^n\omega}$ come somma algebrica espressa col solo seno e coseno dell'arco ω[18].

Dei Problemi V, VI, VII, VIII diamo una panoramica dei casi che l'autore porta a compimento, sottolineando in conclusione che in alcuni di questi casi si fa uso nella risoluzione di applicazioni del Teorema di Cotes che si ritrovano anche nei Corollari riportati nel Secondo Opuscolo.

• Formula I

$$\int\frac{\operatorname{sen}^n\omega d\omega}{\cos^m\omega} = -\int -\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}}{x^m}dx$$

m frazionario, *n* dispari;
m dispari, *n* frazionario;
m ed *n* frazionari, $m-n$ pari.

Formula II

$$\int\frac{\cos^n\omega d\omega}{\operatorname{sen}^m\omega} = -\int\frac{-x^n dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{m+1}{2}}}$$

n frazionario, *m* dispari;
m, n frazionari, $n-m$ pari e positivo;
$m=0$, *n* intero.

Formula III

$$\int\operatorname{sen}^n\omega\cos^m\omega d\omega = -\int x^m\left(1-x^2\right)^{\frac{n-1}{2}}dx$$

m frazionario, *n* dispari;
m dispari, *n* frazionario;
m, n frazionari, $\frac{-m-n}{2}-1$ intero.

Formula IV

$$\int\frac{d\omega}{\operatorname{sen}^n\omega\cos^m\omega} = -\int\frac{dx}{x^m\left(1-x^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$

n frazionario, *m* dispari;
n pari, *m* pari;
m, n frazionari, $m+n$ pari;
m dispari, *n* dispari;
$n=0$, *m* intero.

[18] Alle p. 42-44.

OPUSCOLO II
SUL TEOREMA DI ROGER COTES, SUO USO, UTILITÀ, EFFICACIA[19]

Penso che nessuno dei Geometri ignori quanto grande sia l'utilità del Teorema di Cotes e quasi la sua necessità nell'Analisi Sublime, soprattutto nel calcolo degli integrali dove le formule differenziali contengono una quantità binomia o trinomia al denominatore, cosa facilmente risolvibile con questo Teorema. Questa cosa fu chiara ai geometri per la prima volta dopo che nell'anno 1722 l'opera postuma dell'acutissimo geometra Roger Cotes intitolata "Harmonia mensurarum, sive Analysis, et Synthesis per Rationum, et Angulorum mensuras promotae" venne alla luce grazie all'opera di Robert Smith. All'interno di questa importante opera appare per la prima volta questo bellissimo ed elegantissimo teorema, ma enunciato senza alcuna dimostrazione...[20]

Roger Cotes[21], matematico inglese discepolo di Newton, fu educato alla St. Paul's School di Londra, per poi studiare al Trinity College di Cambridge, dove ottenne la cattedra di Astronomia e Filosofia Sperimentale che tenne fino alla prematura morte. Le opere da lui pubblicate nella breve vita sono tre: la *Prefazione alla Seconda Edizione* dei *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1713) di Isaac Newton, conseguenza del lavoro compiuto al suo fianco dal 1709, nella quale difende le teorie del suo maestro contro quelle ancora molto forti dei vortici di Descartes; la *Logometria*[22], dove tra l'altro definisce la base *e* del logaritmo naturale e la chiama *ratio modularis*, illustrandone lo sviluppo in frazione continua, e scopre la formula $\varphi\sqrt{-1} = \ln(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$ attribuita più tardi ad Eulero; *A description of the Great Meteor which was on the 6th of March 1716...*[23], descrizione di un'eclissi totale di sole. Dopo la morte le carte che aveva lasciato furono riordinate e pubblicate da Robert Smith[24] in due volumi: *Harmonia Mensurarum, sive Analysis et Synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae: Accedunt alia opuscola mathematica; per Rogerum Cotesium*[25]; *Hydrostatical and Pneumatical Lectures by Roger Cotes*[26]. Il secondo di questi racconta gli esperimenti compiuti alla Scuola di Scienze Fisiche del Trinity College da Cotes e William Whiston, ma è l'*Harmonia Mensurarum* quella che veramente rivela la grande abilità ed il profondo genio matematico di questo scienziato scomparso a soli 34 anni: in essa trova spazio anche un Teorema che avrà un'importanza essenziale per gran parte del secolo diciottesimo nella risoluzione di numerosi integrali, poiché permette con metodi geometrici di scomporre il binomio $x^n \pm a^n$ in fattori di primo e secondo grado.

Il metodo di risoluzione facente uso del Teorema di Cotes sarà superato più tardi

---

[19] *De Theoremate Rogerii Cotes, ejus usu, utilitate, praestantia*, p.61-119.

[20] Così le prime righe dell'Opuscolo II, alla p. 61.

[21] Burbage - Leicestershire, Inghilterra, 10 luglio 1682; Cambridge, Inghilterra, 5 giugno 1716.

[22] Memoria pubblicata in *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 29 (1714).

[23] *Philosophical Transactions of the Royal Society*, 31 (1720).

[24] Robert Smith (Lea, Inghilterra, 1689 - Cambridge, 1768). Professore di Astronomia a Cambridge, ha lasciato opere di Ottica e di Acustica. Cugino di Roger Cotes, curò la stampa delle sue opere postume e gli successe nell'insegnamento dalla stessa cattedra.

[25] Cambridge, 1722, vi è riportata anche la *Logometria*.

[26] Londra, 1738.

dalle ricerche di Jean Bernoulli e di Leonhard Eulero, che apriranno nuove agevoli strade al calcolo di questi ed altri tipi di integrali, tanto che questo teorema è oggi, se non dimenticato, ridotto semplicemente ad una curiosa proprietà del cerchio. Nel Settecento esso era certamente tanto celebre e di uso comune da indurre l'autore di questi opuscoli a darne una dimostrazione e numerosi corollari senza riportarne il testo in nessuna parte del trattato.

Eccone dunque la versione geometrica:

TEOREMA DI COTES

Divisa una circonferenza di centro C in n parti uguali $OO_1, O_1O_2, O_2O_3, \dots$ e preso un punto P sulla retta OC:

se P si trova all'esterno della circonferenza vale: $(\overline{PC})^n - (\overline{OC})^n = \overline{PO} \cdot \overline{PO_1} \cdot \overline{PO_2} \cdot \overline{PO_3} \dots$

se P si trova all'interno della circonferenza vale: $(\overline{OC})^n - (\overline{PC})^n = \overline{PO} \cdot \overline{PO_1} \cdot \overline{PO_2} \cdot \overline{PO_3} \dots$

Un esempio di applicazione analitica si trova nel fatto che per mezzo del Teorema il binomio $x^{2n}+1$ può essere scomposto in fattori di secondo grado a coefficienti reali del tipo $\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi}{2n} + 1\right)$ ed il binomio $x^{2n}-1$ in altri del tipo $\left(x^2 - 2x\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$.

Gregorio Fontana dimostra in questo trattato anche una generalizzazione dell'enunciato, dovuta a De Moivre nel 1730, che permette di scomporre il trinomio $x^{2n} \pm 2x^n \cos\alpha + 1$ in fattori di secondo grado a coefficienti reali del tipo $\left(x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi+\alpha}{n} + 1\right)$, se nella formula sopra vi è il segno –, e $\left(x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi+\alpha}{n} + 1\right)$, se nella formula sopra vi è il segno +.

Tornando al matematico inglese, possiamo immaginare come una dimostrazione postuma, costruita sulla base di appunti trovati e riordinati da altra persona, possa con facilità presentare molti punti oscuri, a volte ambigui, spesso non provati con sufficiente cura; così il Teorema di cui si occupa il nostro matematico compare sì nell'*Harmonia Mensurarum*, ma la dimostrazione che lo accompagna, ricostruita da Robert Smith sulla lettura degli appunti di Cotes, non ha mai ottenuto il consenso dei geometri che ne hanno preso visione. Secondo il *Dictionary of Scientific Biography*[27] una prova definitiva, facente uso solamente di argomenti geometrici, sarà data nel 1797 da J. Brinkley[28], ma a nostro avviso anche quella del Fontana, anteriore di tre decenni, è da considerarsi soddisfacente pur ricorrendo alla Trigonometria ed a qualche elementare nozione di Analisi Complessa.

Nel dare inizio a questo secondo Opuscolo, dopo aver giustificato la proposta di una nuova dimostrazione del Teorema di Cotes, Gregorio Fontana elenca e commenta quelle pubblicate fino alla comparsa della propria, trovate da scienziati sia celebri che minori: come abbiamo premesso, Robert Smith è l'autore della prima, aggiunta in calce

---

27 *Dictionary of Scientific Biography*, Charles Coulston Gillispie; Charles Scribner's Sons, New York. Alla voce: Cotes, Roger.

28 John Brinkley (Inghilterra; Dublino 1835), astronomo, leggerà il 4 novembre 1797 all'Accademia d'Irlanda una *Dimostrazione generale del Teorema di Cotes, dedotta dalle sole proprietà del cerchio* (in *Transactions of the Royal Irish Academy*, vol. 7°).

all'opera di Cotes, bocciata dal nostro autore per espressioni ambigue e di dubbia chiarezza; Henry Pemberton[29] propone quasi la medesima nella *Epistola ad amicum de Cotesii inventis, curvarum ratione, quae cum circulo et Hyperbola comparationem admittunt*[30], aggiunta all'opera cotesiana nell'edizione del 1722; Jean Bernoulli[31] consegna la sua alla comunità matematica[32] accompagnata da critiche verso quelle degli altri autori; la dimostrazione di Abraham De Moivre[33] nell'opera *Miscellanea Analytica de Seriebus, et Quadraturis*[34] sembra al Fontana la più chiara fino a quel momento, sebbene sia commentata abbastanza negativamente sia dal Bernoulli che da Jakob Hermann[35]. Altri che si impegnano con uguale successo in questo problema sono Samuel Koenig[36] nei *Novis Actis Eruditorum* (Lipsia, 1741), Charles Walmesley[37] in *Analyse des Mesures des Rapports, et des Angles...*, Louis-Antoine de Bougainville[38] nel *Traité de Calcul Integral*[39] e lo stesso Hermann: tutte, però, non sono per il Fontana abbastanza chiare alla comprensione di matematici non eccelsi, o per eccessiva prolissità, o per estrema brevità delle spiegazioni.

Scrive quindi l'Autore:

> *Pertanto ho stimato che avrei fatto buona cosa, nel caso avessi proposto una nuova e più abbordabile dimostrazione del Teorema di Cotes agli studiosi di Analisi Sublime, e avessi aperto un pronto e spedito accesso a questa fecondissima invenzione di Geometria. Ho portato certi nuovi usi delle radici dell'unità positiva e negativa, dalle quali in seguito ho dedotto la dimostrazione del Teorema. Ho aggiunto applicazioni amplissime dello stesso Teorema nell'Analisi Sublime, e mi sono curato di dimostrare tutte le cose somme con la maggiore brevità e perspicuità possibile, allo scopo di non lasciare ai giovani geometri alcunché da rimpiangere, ma che le possano trovare tutte piane e comprensibili.*[40]

---

29 Henry Pemberton (Londra 1694; ivi 1771). Fisico, matematico, medico, il suo nome è soprattutto legato alla Terza Edizione dei *Principia* di Newton, della quale fu responsabile.

30 Londra, 1722.

31 Jean Bernoulli (Basilea, Svizzera, 1667, ivi 1748). Maestro di Eulero, lasciò importanti studi sul calcolo esponenziale e sulla soluzione del problema della brachistocrona.

32 *Operum*, tomo IV, n° CLX.

33 Abraham De Moivre (Vitry-le-Francois, Francia 1667, Londra 1754). Si occupò soprattutto di calcolo delle probabilità, ma il suo nome è legato anche ad importanti teoremi di calcolo differenziale. Gli viene attribuita la formula $(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)^n = \cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\,n\varphi$.

34 Libro II, cap. I.

35 Jakob Hermann (Basilea, Svizzera, 1678; ivi, 1733). Discepolo di Jean Bernoulli e amico di Leibniz, visse anche in Italia (Bologna), si occupò di calcolo infinitesimale e di meccanica.

36 Johann Samuel Koenig (Berna, Svizzera, 1712; Zuilenstein, Olanda, 1757). Amico e discepolo di Jakob Hermann, si formò alle idee di Leibniz; viaggiò molto, dedicandosi all'insegnamento in molte città europee ed allo sviluppo della filosofia della scienza.

37 Charles Walmesley (Inghilterra, 1721; Bath, Inghilterra, 1797). Matematico ed astronomo, benedettino, scrisse opere di Analisi e sul movimento dei corpi celesti; fu uno degli scienziati consultati dal governo inglese per la riforma del calendario operata nel 1752.

38 Louis-Antoine de Bougainville (Parigi, 1729; ivi, 1811). Navigatore ed esploratore, nella giovinezza si fece apprezzare per un trattato di calcolo integrale; successivamente esercitò l'avvocatura e la carriera militare; dedicatosi alla navigazione, intraprese un viaggio intorno al mondo in cui riconobbe molte nuove isole, una delle quali, nell'arcipelago delle Salomone, porta ancora il suo nome; dopo aver partecipato alla guerra d'America, tornò agli studi scientifici e fu infine nominato Conte da Napoleone.

39 Tomo I, Introduzione al § LXIII.

40 Alla p. 65-66.

Ecco dunque come procede la dimostrazione del Fontana, in uno schema della parte introduttiva:

Nel primo problema si ricavano alcune proprietà delle radici complesse di grado n dell'unità positiva e negativa; in questa occasione l'autore dimostra una buona dimestichezza con l'algebra dei complessi, formata, come egli stesso lascia intendere in una nota inserita tra le spiegazioni[41], sui testi di d'Alembert[42], di Eulero[43] e di Bougainville[44].

Nel secondo e nel Porisma si cercano le soluzioni x dell'equazione

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n = l+\sqrt{l^2-1}\,;$$

se si considera $-1 \leq l \leq 1$, si vede subito che il numero complesso $l+\sqrt{l^2-1} = l+i\sqrt{1-l^2}$ individua nello spazio vettoriale $C \equiv R^2$ il punto sulla circonferenza trigonometrica corrispondente all'angolo α tale che $\cos\alpha = l$, quindi gli n valori di x cercati corrispondono alle radici n-esime di quel valore complesso (che ha modulo unitario trovandosi sulla circonferenza suddetta); si noti che come α ci sono altri infiniti angoli di ampiezza $2\pi+\alpha, 2\pi-\alpha, 4\pi+\alpha, 4\pi-\alpha, \ldots$ che soddisfano le medesime condizioni. Ora si dimostra che le n soluzioni trovate corrispondono ai valori del coseno dell'n-esima parte degli angoli sopra nominati, così che $x_1 = \cos\frac{\alpha}{n}$, $x_2 = \cos\frac{(2\pi+\alpha)}{n}$, $x_3 = \cos\frac{(2\pi-\alpha)}{n}, \ldots$; essendo $x_1+\sqrt{x_1^2-1} = \cos\frac{\alpha}{n}+i\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{n}}$ il punto sulla circonferenza trigonometrica individuato dall'angolo $\frac{\alpha}{n}$, il Fontana dimostra sostanzialmente, in notazione moderna, che le radici n-esime di un vettore di $\mathbf{R}^2$ di coordinate polari $(1,\alpha)$ sono: $\left(1,\frac{\alpha}{n}\right)$, $\left(1,\frac{2\pi+\alpha}{n}\right)$, $\left(1,\frac{2\pi-\alpha}{n}\right), \ldots$; in altra forma, viene verificata la formula $\left(\cos\frac{\omega}{n}+i\,\mathrm{sen}\frac{\omega}{n}\right)^n = \cos\omega + i\,\mathrm{sen}\,\omega$ per i valori $\omega = \alpha; 2\pi+\alpha; 2\pi-\alpha; 4\pi+\alpha; 4\pi-\alpha; \ldots$

<u>Problema I</u> Individuare tutte le radici dell'unità, che siano di grado n.

<u>Soluzione (traccia)</u> le radici complesse di grado n dell'unità sono le soluzioni dell'equazione $x^n-1=0$ e sono in numero uguale a n; queste radici sono in parte reali (± 1 se n è pari, $+1$ se n è dispari) ed in parte complesse: le radici complesse sono in numero pari e se c'è una radice $a+ib$, anche $a-ib$ è radice dell'unità. Si trova poi che per ogni radice complessa del tipo $a \pm ib$ vale $a^2+b^2=1$ e quindi $-1<a,b<1$.

<u>Corollario I</u> Se $a+ib$ è radice n-esima dell'unità, vale: $(a+ib)(a-ib)=-1$.

<u>Corollario II</u> I divisori semplici di x^n-1 sono $x+1$ (con n pari), $x-1$, $x-a-ib$, $x-a+ib$, $x-e-if$, $x-e+if$, ecc. e sono reali e complessi; i divisori di secondo grado di x^n-1 sono x^2-1 ($x-1$ se n è dispari), $x^2-2ax+1$, $x^2-2ex+1$, ecc. e sono tutti reali. Di conseguenza il binomio x^n-1 sarà scomponibile in $\frac{n}{2}$ fattori reali di secondo grado nel caso di n pari, in $\frac{n-1}{2}$ fattori di secondo grado e uno di primo se n è dispari.

41 Alla p. 67.
42 *Recherches sur le Calcul Integral*, art. XI, in *Monum. Berolin.* to. II.
43 *Recherches sur les Racines imaginaires des équations*, in *Monum. Berolin.* to. V.
44 *Traité de Calcul Intégral*, to. I, Introduct. art. LXVII.

Corollario III La scomposizione di $x^{2n}-1$ sarà formata dagli $\frac{n}{2}$ ($\frac{n+1}{2}$ se n è dispari) fattori reali di primo e secondo grado di x^n-1 e da altri $\frac{n}{2}$ ($\frac{n-1}{2}$ se n è dispari) fattori reali di secondo grado in questa maniera:

$x^{2n}-1=(x^2-1)(x^2-2ax+1)(x^2-2ex+1)\cdot$ ecc. $\cdot(x^2-2\mu x+1)(x^2-2\lambda x+1)\cdot$ ecc. se n è pari,

$x^{2n}-1=(x-1)(x^2-2gx+1)(x^2-2px+1)\cdot$ ecc. $\cdot(x^2-2\varphi x+1)(x^2-2\omega x+1)\cdot$ ecc. se n è dispari.

Corollario IV Dato che $x^{2n}-1=(x^n-1)(x^n+1)$, dal corollario precedente si ottiene:

$x^n+1=(x^2-2\mu x+1)(x^2-2\lambda x+1)\cdot$ ecc. se n è pari,

$x^n+1=(x^2-2\varphi x+1)(x^2-2\omega x+1)\cdot$ ecc. $\cdot(x+1)$ se n è dispari.

Problema II Trovare le soluzioni x dell'equazione

$$l+\sqrt{l^2-1}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n.$$

Soluzione Data una quantità a, tutte le sue radici di grado n sono date da una qualsiasi radice n-esima moltiplicata per tutte le radici n-esime dell'unità positiva, se $a>0$, o dell'unità negativa, se $a<0$. Appurato questo, ed estratta la radice n-esima da entrambi i membri dell'equazione data, si troverà $x+\sqrt{x^2-1}=v\left(l+\sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, dove v indica tutte le radici di grado n dell'unità. Poi risulta $x=\frac{v}{2}\left(l+\sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}+\frac{1}{2v\left(l+\sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}}$ ed i valori di x sono, dipendendo da quelli di v, in numero di n (Problema I).

Se $0\le l<1$, indicato con $A+iB$ il numero complesso $\left(l+i\sqrt{1-l^2}\right)^{\frac{1}{n}}$, per mezzo del Corollario I del Problema I si trova $x=\frac{v}{2}(A+iB)+\frac{A-iB}{2v}$ ed indicati i valori di v con ±1, $a\pm ib$, $e\pm if$, ... si trovano $x=\pm A$, $x=Aa\pm Bb$, $x=Ae\pm Bf$, ...

Se $-1<l\le0$, operata la sostituzione $l=-m$ con $m\ge0$, si vede che

$$\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n=-m+\sqrt{m^2-1}=-1\left(m-\sqrt{m^2-1}\right) \quad \text{e} \quad x+\sqrt{x^2-1}=u\left(m-\sqrt{m^2-1}\right)^{\frac{1}{n}},$$

dove u indica tutte le radici n-esime di -1. Procedendo come nel caso precedente e tenendo conto dei Corollari III e IV del Problema I si ottiene che le soluzioni saranno anch'esse del tipo: $x=-A$, $x=A\mu\pm Bv$, $x=A\lambda\pm B\delta$, ...

Se $l=1$, anche $l+\sqrt{l^2-1}=1$ e $A=1$, $B=0$, $x=\frac{v}{2}+\frac{1}{2v}$; in questo caso le soluzioni risultano essere $x=1$, $x=-1$, $x=a$, $x=e$, ...

Se $l=-1$, similmente sarà $x=-1$, $x=\mu$, $x=\lambda$, ...

Infine si dimostra che tutte le soluzioni x sono reali e comprese nell'intervallo $[-1,1]$ se anche l lo è.

Porisma

Sia l il coseno di un arco descritto dal raggio dato 1, e dagli altri archi fino all'infinito; tutti i valori dello stesso x ricavati dall'equazione $l+\sqrt{l^2-1}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$ *saranno altrettanti coseni degli archi che sono parti n-esime degli archi iniziali.*[45]

Dimostrazione Sia $\alpha, 2\pi-\alpha, 2\pi+\alpha, 4\pi-\alpha, 4\pi+\alpha$, ... una successione di archi sulla circonferenza trigonometrica tali che il loro coseno sia l; definita la successione di archi $\frac{\alpha}{n}, \frac{2\pi-\alpha}{n}, \frac{2\pi+\alpha}{n}, \frac{4\pi-\alpha}{n}, \frac{4\pi+\alpha}{n}, \ldots$ (1) si deve mostrare che le soluzioni $x_1, x_2, x_3, \ldots$ dell'equazione $l+\sqrt{l^2-1}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$ sono i valori del coseno degli angoli della successione (1). Per prima cosa l'autore mostra che se si considera l'elemento n-esimo della successione (1), che è $\frac{\frac{n}{2}2\pi-\alpha}{n}$ (se n è pari) o $\frac{\frac{n-1}{2}2\pi+\alpha}{n}$ (se n è dispari), l'elemento seguente $(n+1)$-esimo nella successione avrà lo stesso suo valore di coseno poiché risultano essere complementari alla circonferenza 2π; poi l'elemento $(n+2)$-esimo avrà lo stesso coseno dell'elemento $(n-1)$-esimo, e così via fino a trovare che l'elemento $2n$-esimo, cioè $\frac{n2\pi-\alpha}{n}$, avrà lo stesso coseno del primo elemento $\frac{\alpha}{n}$. Così si può fare anche per gli elementi che vanno dalla posizione $(2n+1)$-esima alla $3n$-esima, e così via all'infinito. Chiarito in questo modo che la successione di angoli (1) ha al massimo n elementi con valore del coseno differente uno dall'altro, il prossimo passo sarà quello di identificare questi n elementi con gli n valori di x trovati nel Problema II (valori che, essendo $-1 \leq l \leq 1$, saranno reali e compresi nell'intervallo $[-1,1]$): sapendo che $l=\cos\alpha$ ed ipotizzando un angolo β tale che $x=\cos\beta$, operando le sostituzioni $l=\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$ ed $x=\frac{1}{\sqrt{z^2+1}}$ e notando che $u=\frac{\sqrt{1-l^2}}{l}=tg\alpha$ e $z=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=tg\beta$, dall'equazione $l+\sqrt{l^2-1}=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n$ si trova con qualche passaggio la forma $iu=\frac{(1+iz)^n-(1-iz)^n}{(1-iz)^n+(1+iz)^n}$, che sviluppando le potenze di n e dividendo per i diventa:

$$u=\frac{nz-\frac{n(n-1)(n-2)z^3}{2\cdot 3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)z^5}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\text{ecc.}}{1-\frac{n(n-1)z^2}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)z^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\text{ecc.}}$$

che è proprio lo sviluppo di:

$$u=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}n\varphi=\frac{n\operatorname{tg}\varphi-\frac{n(n-1)(n-2)\operatorname{tg}^3\varphi}{2\cdot 3}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\operatorname{tg}^5\varphi}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\text{ecc.}}{1-\frac{n(n-1)\operatorname{tg}^2\varphi}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\operatorname{tg}^4\varphi}{2\cdot 3\cdot 4}-\text{ecc.}}$$

45 Alla p. 81.

Quindi si ottiene che $u = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} n\varphi = \operatorname{tg} n\frac{\alpha}{n}$ e che $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{n} = \operatorname{tg}\varphi = z = \operatorname{tg}\beta$, quindi che $\varphi = \beta = \frac{\alpha}{n}$ e $z = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{n}$; questo significa allora che $x = \cos\frac{\alpha}{n}$ come si richiedeva.

Terminate le costruzioni introduttive, finalmente il Fontana giunge a dimostrare realmente il Teorema che dà il titolo a questo Secondo Opuscolo. Infatti in questa parte si prefigge lo scopo di dare una scomposizione di $1-x^n$ e di $1+x^n$, più avanti di $x^{2n} \pm 2lx^n + 1$.

Dimostrazione del Teorema - Prima Parte (Teorema di Cotes)

Rimanendo legati alla costruzione geometrica vista nel Porisma, si consideri dapprima $l = 1$: in questo caso sarà $\alpha = 0$, oppure $\alpha = 2\pi, \alpha = 4\pi, \ldots$ e la successione di archi (1) diventerà la seguente: $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots$; per i risultati visti nel Porisma, se $l = \cos\alpha = 1$ allora i valori di $x = \cos\frac{\alpha}{n}$ saranno i valori trovati nel Problema II (nel caso di $l = 1$) $x = \cos\frac{0}{n} = 1$, $x = \cos\frac{2\pi}{n} = a$, $x = \cos\frac{2\pi}{n} = a$, $x = \cos\frac{4\pi}{n} = e$, $x = \cos\frac{4\pi}{n} = e$, ...

Se $l = -1$, per gli stessi motivi si troverà che il coseno degli angoli della successione (1) (che diventa $\frac{\pi}{n}, \frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \ldots$) avrà come valori -1, μ, μ, λ, λ,... (Problema II, caso $l = -1$).

Ora[46] preso sulla retta del diametro $\overline{OD}$ del cerchio unitario un punto C (anche esterno alla circonferenza), tale che la sua distanza dal centro A sia $\overline{AC} = x$ (non è la medesima variabile x utilizzata in precedenza) e scelto un punto M sulla circonferenza tale che $\cos \mathrm{OM} = \overline{\mathrm{BA}} = a$ (a è il valore di $\cos\frac{2\pi}{n}$ visto sopra), si troverà che $\overline{\mathrm{CM}} = \sqrt{1 - 2ax + x^2}$; questo vale anche se a indica un valore negativo del coseno, o se l'angolo è maggiore di π ed ha lo stesso coseno a, come da figura nei punti N, Q, R.

Così si nota che, divisa la circonferenza in n archi uguali[47] A0, A1, A2, A3, ... e preso un punto Q sulla retta del diametro, i segmenti $\overline{Q0}, \overline{Q1}, \overline{Q2}, \ldots$ relativi agli archi di A0, A1, A2,... di coseno $1, a, e, \ldots$ sono lunghi rispettivamente $1-x$, $\sqrt{1-2ax+x^2}$, $\sqrt{1-2ex+x^2}$,...

Finalmente, si consideri a questo punto una circonferenza divisa in $2n$ archi uguali, con n pari[48], e da un punto Q sulla retta del diametro a distanza x dal centro si traccino i segmenti $\overline{Q0}, \overline{Q2}, \overline{Q4}, \overline{Q6}\ldots$ (relativi agli angoli $0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \frac{6\pi}{n}, \ldots$) che si trovano avere lunghezza $1-x$, $\sqrt{1-2ax+x^2}$, $\sqrt{1-2ex+x^2}$, ... , $1+x$, ... , $\sqrt{1-2ex+x^2}$, $\sqrt{1-2ax+x^2}$ ed il cui prodotto sarà $= (1-x)(1+x)(1-2ax+x^2)(1-2ex+x^2)\cdot\ldots =$ (per il Corollario II, Problema I) $= 1-x^n$; perciò $1-x^n$ risulta essere uguale al prodotto di tutte le rette condotte dal punto Q alle estremità degli archi A0, A2, A4, A6, ...

[46] Facendo riferimento al disegno IV, nella figura ripresa dall'opera originale.

[47] Nel disegno II: n pari; nella figura III: n dispari.

[48] Ancora il disrgno II.

Ora si vede anche che i segmenti rimanenti $\overline{Q1}, \overline{Q3}, \overline{Q5}$, ... (relativi agli angoli $\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \frac{5\pi}{n}, \ldots$) hanno lunghezza $\sqrt{1-2\mu x+x^2}$, $\sqrt{1-2\lambda x+x^2}$, ..., $\sqrt{1-2\lambda x+x^2}$, $\sqrt{1-2\mu x+x^2}$ e il loro prodotto è $(1-2\mu x+x^2)(1-2\lambda x+x^2)\ldots=$ (per il Corollario IV del Problema I) $=1+x^n$.
Quindi si è dimostrato, come si richiedeva, che $1-x^{2n}=(1-x^n)(1+x^n)=$

$$=(1-x)(1+x)(1-2ax+x^2)\cdot(1-2ex+x^2)\cdot\ldots\cdot(1-2\mu x+x^2)\cdot(1-2\lambda x+x^2)=$$

$$=(1-x)(1+x)\cdot\cdot\left(1-2x\cos\frac{2\pi}{n}+x^2\right)\cdot\left(1-2x\cos\frac{2\cdot 2\pi}{n}+x^2\right)\cdot\left(1-2x\cos\frac{3\cdot 2\pi}{n}+x^2\right)\ldots$$

$$\cdot\left(1-2x\cos\frac{\pi}{n}+x^2\right)\cdot\left(1-2x\cos\frac{(2+1)\pi}{n}+x^2\right)\cdot\left(1-2x\cos\frac{(4+1)\pi}{n}+x^2\right)\ldots$$

Nel caso di n dispari il procedimento è simile e porta ai medesimi risultati.

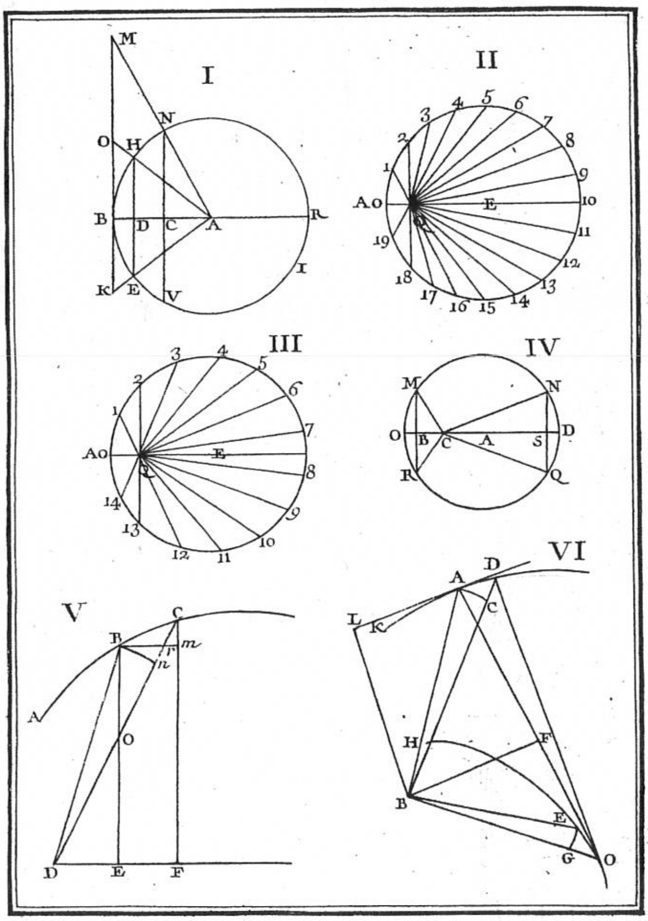

Fig. 5 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pagina finale con figure. Ridotta.

Dimostrazione del Teorema - Seconda Parte (generalizzazione di De Moivre)

Consideriamo il trinomio che ci si propone di scomporre: $x^{2n} \pm 2lx^n + 1 = 0$ $(l \geq 0)$ da esso si ricava $x^n = \mp\left(l \pm \sqrt{l^2-1}\right)$, da cui si vede subito che x^n è una quantità reale se $l \geq 1$, complessa se $l < 1$.

Sia $l \geq 1$: scomposto $x^{2n} + 2lx^n + 1 = \left(x^n + l - \sqrt{l^2-1}\right)\left(x^n + l + \sqrt{l^2-1}\right)$, si ponga $l - \sqrt{l^2-1} = p^n$ e $l + \sqrt{l^2-1} = q^n$, $\frac{x}{p} = z$ e $\frac{x}{q} = y$ e risulterà $x^{2n} + 2lx^n + 1 = p^n\left(z^n+1\right)q^n\left(y^n+1\right) = \left(z^n+1\right)\left(y^n+1\right)$. A questo punto è possibile scomporre $z^n + 1$ e $y^n + 1$ in fattori reali di secondo grado, come si è appena dimostrato, e si troverà il trinomio $x^{2n} + 2lx^n + 1$ ridotto in fattori reali come era richiesto. La stessa procedura vale anche per $x^{2n} - 2lx^n + 1$.

Sia ora $0 \leq l \leq 1$: in questo caso $x^n = \mp(l \pm \sqrt{l^2-1})$ risulta essere una quantità complessa; nel caso di $x^{2n} + 2lx^n + 1 = 0$, estratta da $x^n = -l \pm \sqrt{l^2-1}$ la radice n-esima si trova $x = u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $x = u\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, dove u indica tutte le radici di grado n dell'unità negativa, che sono in numero di n (come si è visto nel Problema I). Per questo i $2n$ divisori semplici del trinomio considerato saranno del tipo $x - u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $x - u\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, che possono essere anche scritti nella forma $x - u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $x - \frac{1}{u}\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ per il Corollario I del Problema I; considerato un singolo valore di u, si vede subito che

$$\left[x - u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right]\cdot\left[x - \frac{1}{u}\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}\right] = \; = x^2 - 2x\frac{u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{u}\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}}{2} + 1$$

ed anche che

$$\frac{u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{u}\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}}{2} = \frac{u}{2}\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}}$$

che, per i risultati visti nel Problema II e nel Porisma, esprime tutti i valori del coseno degli archi della successione $\frac{\alpha}{n}, \frac{2\pi-\alpha}{n}, \frac{2\pi+\alpha}{n}, \frac{4\pi-\alpha}{n}, \frac{4\pi+\alpha}{n}, \ldots$ fino all'arco $\frac{\frac{n}{2}2\pi-\alpha}{n}$ (con n pari) o all'arco $\frac{\frac{n-1}{2}2\pi+\alpha}{n}$ (con n dispari), indicando con α l'arco di coseno $-l$. Se dunque si vogliono chiamare $\psi, \varepsilon, \sigma, \ldots$ i coseni di questi archi, i valori delle n quantità $x^2 - 2x\frac{u\left(l - \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{u}\left(l + \sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}}{2} + 1$ ottenuti dalla sostituzione di tutti i valori di u saranno $x^2 - 2\psi x + 1$, $x^2 - 2\varepsilon x + 1$, $x^2 - 2\sigma x + 1$, ... ed il loro prodotto sarà proprio il trinomio $x^{2n} + 2lx^n + 1$.

E così il trinomio $x^{2n} + 2lx^n + 1$ potrà essere sempre scomposto in divisori reali di secondo grado del tipo $x^2-2x\cos\frac{\alpha}{n}+1$, $x^2-2x\cos\frac{2\pi-\alpha}{n}+1$, $x^2-2x\cos\frac{2\pi+\alpha}{n}+1$, $x^2-2x\cos\frac{4\pi-\alpha}{n}+1$, ..., come era richiesto.

Analogamente il trinomio $x^{2n}-2lx^n+1$ avrà divisori semplici del tipo $x-v\left(l+\sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ e $x-v\left(l-\sqrt{l^2-1}\right)^{\frac{1}{n}}$, dove v indica tutte le radici di grado n dell'unità positiva.

Terminata la dimostrazione di Gregorio Fontana aggiungiamo un esempio di applicazione del Teorema di Cotes al trinomio x^8+6x^4+1, dove $l=3$ e $n=4$. In questo caso di trova facilmente che

$$l-\sqrt{l^2-1}=3-\sqrt{8}=p^4 \qquad l+\sqrt{l^2-1}=3+\sqrt{8}=q^4$$
$$z=\frac{x}{p}=\frac{x}{\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}} \qquad y=\frac{x}{q}=\frac{x}{\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}}$$

da cui la scomposizione: $x^8+6x^4+1=\left(z^4+1\right)\left(y^4+1\right)=$

$$=\left(1-2z\cos\frac{\pi}{4}+z^2\right)\cdot\left(1-2z\cos\frac{3\pi}{4}+z^2\right)\left(1-2y\cos\frac{\pi}{4}+y^2\right)\left(1-2y\cos\frac{3\pi}{4}+y^2\right)=$$
$$=\left(1-\sqrt{2}z+z^2\right)\left(1+\sqrt{2}z+z^2\right)\left(1-\sqrt{2}y+y^2\right)\left(1+\sqrt{2}y+y^2\right)=$$
$$=\left(x^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{3-\sqrt{8}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x^2-\sqrt{2}\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)\left(x^2+\sqrt{2}\sqrt[4]{3+\sqrt{8}}+\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)$$

Un altro esempio può essere la scomposizione di $x^{12}+\sqrt{3}x^6+1$, dove $l=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e n=6; in questo caso $\cos\alpha=-l=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, quindi $\alpha=\frac{5}{6}\pi$ e la scomposizione risulta essere:

$$x^{12}+\sqrt{3}x^6+1=$$
$$=\left(x^2-2x\cos\frac{5}{36}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{7}{36}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{17}{36}\pi+1\right)\cdot$$
$$\cdot\left(x^2-2x\cos\frac{19}{36}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{29}{36}\pi+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{31}{36}\pi+1\right)=$$
$$=\left(x^2-2x\cos\frac{5}{36}\pi+1\right)^2\left(x^2-2x\cos\frac{7}{36}\pi+1\right)^2\left(x^2-2x\cos\frac{17}{36}\pi+1\right)^2$$

Alla dimostrazione seguono dodici Corollari che ne mostrano alcune applicazioni nella scomposizione di polinomi generici, nell'integrazione di funzioni particolari, nella risoluzione di problemi geometrici interessanti. Con intento più didattico che d'innovazione, l'autore riprende risultati già pubblicati da Eulero, Hermann, Taylor e da Thomas Le Seur[49], offrendoli ai lettori in maniera comprensibile e completa, come è proprio del suo stile.

Corollari I e II Si dimostrano i risultati pubblicati da Eulero in *De la Controverse entre Mrs. Leibniz, et Bernoulli sur les Logarithmes des nombres negatifs et imaginaires*[50]: nella fattispecie si trovano la scomposizione di p^n-q^n, formata da fattori del tipo

[49] *Mémoire sur le Calcul Integral*, Roma 1748.
[50] In *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin*, anno 1749.

$p^2-2pq\cos\frac{2\lambda\pi}{n}+q^2$, e le radici di tale binomio, della forma $p=q\left(\cos\frac{2\pi\lambda}{n}\pm i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi\lambda}{n}\right)$; in modo analogo si tratta il binomio p^n+q^n.

<u>Corollari III e IV</u> Si danno i fattori di primo e secondo grado della scomposizione dei binomi $a^n\pm z^n$ per n=2;3;4;5;6;7;8;9;10. Riportiamo in figura la forma originale anche per mostrare alcuni tipici errori di stampa (piuttosto frequenti in tutto il volume), come ω inserito al posto di π, e per far notare la fantasia tipografica nella scelta dei differenti caratteri che indicano l'addizione.

<u>Corollario V</u> Si scompone la frazione $\frac{1}{1+z^n}$ col metodo di J. Hermann, allo scopo di calcolarne l'integrale. Supposto n pari e posto $U(z)=1+z^n$; differenziando si troverà $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n}=\frac{dU}{U}$, che è equivalente a $\frac{n}{1+z^n}=-\frac{zdU}{Udz}+n$. Si scomponga $1+z^n$ per mezzo del Teorema di Cotes, utilizzando le notazioni: $1+z^n=U(z)=Q^2(z)\cdot R^2(z)\cdot S^2(z)\cdot\text{ecc.}$
con $Q^2(z)=1-2\mu z+z^2$, $R^2(z)=1-2\lambda z+z^2$, $S^2(z)=1-2\varepsilon z+z^2$, ecc. Differenziando $U(z)=Q^2(z)\cdot R^2(z)\cdot S^2(z)\cdot\text{ecc.}$ e dividendo per $U(z)$ si trova $\frac{dU}{U}=\frac{2dQ}{Q}+\frac{2dR}{R}+\frac{2dS}{S}+\text{ecc.}$, quindi $-\frac{z}{dz}\frac{dU}{U}=-\frac{z}{dz}\frac{2dQ}{Q}-\frac{z}{dz}\frac{2dR}{R}-\frac{z}{dz}\frac{2dS}{S}-\ldots$. Ora sostituendo in quest'ultima le relazioni seguenti:

$$-\frac{2zdQ}{Qdz}=\frac{2\mu z-2z^2}{1-2\mu z+z^2}=-2+\frac{2-2\mu z}{1-2\mu z+z^2},\qquad -\frac{2zdR}{Rdz}=\frac{2\lambda z-2z^2}{1-2\lambda z+z^2}=-2+\frac{2-2\lambda z}{1-2\lambda z+z^2},$$

$$-\frac{2zdS}{Sdz}=\frac{2\varepsilon z-2z^2}{1-2\varepsilon z+z^2}=-2+\frac{2-2\varepsilon z}{1-2\varepsilon z+z^2},\qquad \text{ecc.}$$

si trova $$-\frac{zdU}{Udz}+n=-2-2-2-\text{ecc.}+n+\frac{2-2\mu z}{1-2\mu z+z^2}+\frac{2-2\lambda z}{1-2\lambda z+z^2}+\frac{2-2\varepsilon z}{1-2\varepsilon z+z^2}+\ldots$$

D'altra parte, poiché $n-2-2-2-\text{ecc.}=0$, si trova finalmente

$$-\frac{zdU}{nUdz}+1=\frac{1}{1+z^n}=\frac{\frac{2}{n}-\frac{2\mu}{n}z}{1-2\mu z+z^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2\lambda}{n}z}{1-2\lambda z+z^2}+\frac{\frac{2}{n}-\frac{2\varepsilon}{n}z}{1-2\varepsilon z+z^2}+\ldots,$$

forma di cui si calcola facilmente la primitiva.
Con esponente n dispari lo svolgimento ed il risultato non sono molto differenti.

<u>Corollario VI</u> Con un metodo analogo a quello del corollario precedente si scompone la frazione $\frac{1}{1-z^n}$.

<u>Corollari VII e VIII</u> Si prendono in considerazione le formule seguenti:

$$\frac{z^m dz}{1\pm z^n},\qquad \frac{dz}{z^m\left(1\pm z^n\right)}\qquad n,\ m \text{ positivi;}$$

$$\frac{z^m dz}{1\pm z^{-r}},\qquad \frac{z^{\frac{t}{r}}dz}{1\pm z^n},\qquad \frac{z^m dz}{1\pm z^{\frac{t}{r}}},\qquad \frac{z^{\frac{r}{p}}dz}{1\pm z^{\frac{t}{q}}}\qquad n,\ m,\ p,\ q,\ r,\ t \text{ positivi;}$$

e dopo averle rese una ad una più semplici per mezzo di sostituzioni appropriate, si scompongono raggiungendo per ciascuna una forma di cui l'integrazione sia nota.

<u>Corollario IX</u> Allo scopo di integrare la formula $\frac{z^n dz}{\left(z^m\pm a^m\right)^r}$, si applica la relazione

$$\int\frac{z^n dz}{\left(z^m\pm a^m\right)^r}=\frac{\mathrm{B}z^{n+rm-2m+1}+\mathrm{C}z^{n+rm-2m}+\mathrm{D}z^{n+rm-2m-1}+\ldots+\mathrm{K}}{\left(z^m\pm a^m\right)^{r-1}}+\mathrm{H}\int\frac{z^n dz}{z^m\pm a^m},$$

della quale si individuano i valori di B, C, D, ..., K differenziandola ed uguagliando a

100 ANALYSEOS SUBLIMIORIS

unde eruuntur radices omnes formulæ $p^n + q^n$, subrogatis successive loco ipsius λ numeris integris respondentibus. Divisores autem simplices formulæ ejusdem erunt $p - q$

$$\left(\cos.\frac{(2\lambda-1)\pi}{n} \pm \sin.\frac{(2\lambda-1)\pi}{n}\sqrt{-1}\right)$$

COROLL. III.

Sit Formula $a^n - z^n$

$n = 2$

Formulæ

$a^2 - z^2$

Factores erunt

$a - z$

$a + z$

Si $n = 4$

Formulæ

$a^4 - z^4$

Factores erunt

$a - z$

$a + z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{4}\pi + z^2$

Si $n = 6$

Formulæ

$a^6 - z^6$

Factores erunt

$a - z$

$a + z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{6}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{4}{6}\pi + z^2$

Si $n = 8$

Formulæ

$a^8 - z^8$

Factores erunt

$a - z$

$a + z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{8}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{4}{8}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{6}{8}\pi + z^2$

Si

Fig. 6 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 100. Corollari III e IV.

OPUSCULUM II. 101

Si n = 3

Formulæ

$a^3 - z^3$

Factores erunt

$a - z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{3}\pi + z^2$

Si n = 5

Formulæ

$a^5 - z^5$

Factores erunt

$a - z$

$a^2 - 2az\cos\frac{2}{5}\pi \maltese z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{4}{5}\pi + z^2$

COROLL. IV.

Sit Formula $a^n + z^n$

$n = 4$

Formulæ

$a^4 \maltese z^4$

Factores erunt

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{4}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{4}\pi + z^2$

Si n = 7

Formulæ

$a^7 - z^7$

Factores erunt

$a - z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{7}\pi \maltese z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{4}{7}\varpi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{6}{7}\pi \maltese z^2$

Si n = 9

Formulæ

$a^9 - z^9$

Factores erunt

$a - z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{2}{9}\varpi + z^2$

$a^2 - 2az\cos\frac{4}{9}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{6}{9}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{8}{9}\pi + z^2$

Si n = 3

Formulæ

$a^3 \maltese z^3$

Factores erunt

$a \maltese z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{3}\pi + z^2$

G 3 Si

Fig. 7 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 101. Corollari III e IV.

102 ANALYSEOS SUBLIMIORIS

Si $n = 6$

Formulæ

$a^6 + z^6$

Factores erunt

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{6}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{6}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{5}{6}\pi + z^2$

Si $n = 5$

Formulæ

$a^5 \pm z^5$

Factores erunt

$a \pm z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{5}\pi \pm z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{5}\pi \pm z^2$

Si $n = 8$

Formulæ

$a^8 \pm z^8$

Factores erunt

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{8}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{8}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{5}{8}\pi + z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{7}{8}\pi + z^2$

Si $n = 7$

Formulæ

$a^7 + z^7$

Factores erunt

$a \pm z$

$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{7}\pi \pm z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{7}\pi \pm z^2$

$a^2 - 2az\cos.\frac{5}{7}\pi \pm z^2$

Fig. 8 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 102. Corollari III e IV.

OPUSCULUM II. 103

Si $n = 10$	Si $n = 9$
Formulæ	Formulæ
$a^{10} \ast z^{10}$	$a^{9} \ast z^{9}$
Factores erunt	Factores erunt
	$a + z$
$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{10}\pi + z^2$	$a^2 - 2az\cos.\frac{1}{9}\pi \ast z^2$
$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{10}\pi + z^2$	$a^2 - 2az\cos.\frac{3}{9}\pi \ast z^2$
$a^2 - 2az\cos.\frac{5}{10}\pi \ast z^2$	$a^2 - 2az\cos.\frac{5}{9}\pi + z^2$
$a^2 - 2az\cos.\frac{7}{10}\pi \ast z^2$	$a^2 - 2az\cos.\frac{7}{9}\pi + z^2$
$a^2 - 2az\cos.\frac{9}{10}\pi \ast z^2$	

COROLL. V.

Reſolvamus nunc Hermanniana methodo fractionem $\frac{1}{1+z^n}$ in ſimpliciores, cum exponens n eſt numerus par. Fiat binomium $1 + z^n = u$, ſintque Q^2, R^2, S^2, &c. factores ejus ſupra inventi. Facta differentiatione logarithmica erit $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n} = \frac{du}{u}$, & $\frac{nz^{n-1}dz}{1+z^n} - \frac{ndz}{z} = \frac{du}{u} - \frac{ndz}{z}$, ſeu $-\frac{ndz}{z \times 1+z^n} =$

G 4 du

Fig. 9 - Gregorio Fontana, 1763 - *Analyseos Sublimioris Opuscula*, pag. 103. Corollari III e IV.

zero le somme di termini simili; quindi l'integrazione della formula data dipenderà solo dalla formula $\frac{H z^n dz}{z^m \pm a^m}$, la cui risoluzione è stata affrontata sopra.

L'autore fornisce a questo punto due esempi di applicazione di questo metodo a problemi storicamente celebri: la rettificazione della Parabola Apolloniana[51] e la quadratura dello spazio Cissoidale[52].

Corollario X Di importanza minore, vi è esposta l'integrazione della formula già vista al corollario precedente, ma in alcuni casi di esponenti razionali.

Corollari XI e XII Vengono riportati e dimostrati i risultati di Taylor[53] sull'integrazione delle formule $\frac{z^m dz}{e \pm fz^n + gz^{2n}}$, $\frac{z^{\frac{r}{m}} dz}{e \pm fz^n + gz^{2n}}$ e $\frac{z^{\frac{r}{m}} dz}{e \pm fz^{\frac{n}{t}} + gz^{\frac{2n}{t}}}$.

---

[51] Apollonio di Perge, matematico greco del III secolo a.C., fu autore di molte opere matematiche tra cui quella sulle Coniche rimane la più celebre. La Parabola qui citata ha equazione $y = \sqrt{ax}$ e la sua lunghezza si ricava dall'integrale $\int \frac{dx\sqrt{4x^2 + ax}}{2x}$. Per mezzo del Teorema di Cotes e delle formule appena esposte, il Fontana individua la lunghezza dell'arco parabolico in $\int_0^x \frac{dx\sqrt{4x^2 + ax}}{2x} = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + ax} + \frac{a}{8}\ln\left(\frac{8x + a + 4\sqrt{4x^2 + ax}}{a}\right)$.

[52] La Cissoide è una curva classica di equazione $y^2 = \frac{x^3}{a - x}$, che nasce nell'origine e con due rami monotoni simmetrici rispetto all'asse delle ascisse tende all'asintoto verticale $x = a$. E' legata al problema della duplicazione del cubo (Diocle, III sec. a. C.). Lo spazio compreso tra la cissoide ed il suo asintoto (Spazio Cissoidale) è dato da $S = \int_0^a \frac{2x^2 dx}{\sqrt{ax - x^2}}$. Risolto per mezzo del metodo ora illustrato, dopo opportuni cambi di variabile e con buoni ragionamenti geometrici, il Fontana trova che la primitiva dell'integrale consiste in $S = \frac{3}{2}a^2 \operatorname{arctg}\frac{ax}{\sqrt{ax - x^2}} - \frac{1}{2}(3a + 2x)\sqrt{ax - x^2}$ che calcolata nell'intervallo [0,a) dà come risultato $S = 3\frac{a^2}{4}\pi$, cioè, considerata la costruzione geometrica della Cissoide, tre volte l'area del cerchio generatore della stessa, che ha raggio uguale ad $\frac{a}{2}$.

[53] Brook Taylor (Middlesex, Inghilterra 1685 - Londra 1731). Ammiratore ed allievo di Newton, si sforzò di sviluppare le idee del maestro nel campo dell'analisi matematica; si occupò con successo di applicazioni fisiche della stessa, nonché di filosofia e di religione. Particolarmente importante lo sviluppo in serie di una funzione di una variabile che lo ha reso celebre.

OPUSCOLO III
DI COME TROVARE LA FORMULA DEL RAGGIO OSCULATORE DELLE CURVE RIFERITE AL CENTRO PARTENDO DALLA FORMULA DATA PER LO STESSO RAGGIO OSCULATORE DELLE CURVE RIFERITE AD UN ASSE, E DI COME ESTRAPOLARE DA QUI LE EVOLUTE DELLE CURVE[54]

Nel terzo ed ultimo opuscolo l'autore propone un metodo generale per ricavare la formula del raggio osculatore e l'equazione dell'evoluta di una curva in coordinate polari, partendo dalle stesse in coordinate cartesiane. Del raggio osculatore trova la formula esplicita, mentre dell'evoluta, essendo i calcoli complessi, si limita ad esporre il metodo da seguire; seguono tre esempi di applicazione: alla spirale logaritmica, ad una curva che si trova avere come evoluta la circonferenza, alla spirale iperbolica. Pur essendo questa parte dell'opera in esame molto breve in rapporto alle altre due, essa contiene alcuni spunti di interesse per il lettore moderno: per primo facciamo osservare come già nel titolo si chiamino *curve riferite al centro* quelle in coordinate polari, e *riferite ad un asse* quelle in coordinate cartesiane; in effetti i termini attuali non erano allora ancora utilizzati e sarà solo dal 1784, due decenni dopo la pubblicazione di questo scritto, che per merito proprio di Gregorio Fontana vedrà la luce il termine *equazione polare*[55]; è da notare per seconda cosa l'ampio uso di concetti geometrici elementari in un argomento, quale è questo, di geometria differenziale: le similitudini, le proporzioni, gli stessi riferimenti alle figure abbondano nelle dimostrazioni e negli esempi; è per noi curiosa la maniera stessa in cui sono scritte le proporzioni, fondendo ciò che noi potremmo scrivere in tre parti separate:

$$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AF}},\quad \text{cioè}\ \sqrt{dz^2+du^2}:du=z:\overline{\mathrm{AF}},\quad \text{quindi}\ \overline{\mathrm{AF}}=\frac{zdu}{\sqrt{dz^2+du^2}}$$

in una sola: $$\overline{\mathrm{AD}}\left[\sqrt{dz^2+du^2}\right]:\overline{\mathrm{AC}}[du]=\overline{\mathrm{AB}}[z]:\overline{AF}\left[\frac{zdu}{\sqrt{dz^2+du^2}}\right];$$

da ultimo, la differente notazione nelle quantità infinitesimali ci spinge a premettere alcune considerazioni: vengono utilizzate le grandezze infinitesimali dx, dy, in coordinate cartesiane, e dz, du in coordinate polari, dove con du si intende $\rho d\theta$ e con dz si intende $d\rho$, quindi dz, du è per noi $d\rho, \rho d\theta$. Con queste grandezze la formula del raggio osculatore risulta essere $\dfrac{(dx^2+dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x-dxd^2y}$ in coordinate cartesiane e $\dfrac{z(du^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{zdzd^2u-zdud^2z+du(dz^2+du^2)}$ in coordinate polari.

Valutando di un certo interesse illustrare in questo articolo, oltre ai contenuti, anche lo stile esplicativo e il modo di procedere abituale dell'autore di cui trattiamo, abbiamo approfittato della brevità di questo terzo saggio per proporne in versione integrale la

---

[54] *De invenienda Formula Radii Osculatoris in Curvis ad umbilicum relatis ex data Formula ejusdem in Curvis relatis ad axem, eruendisque inde Curvarum Evolutis.*

[55] Moritz Cantor ripercorre nella sua opera *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* (vol. 4°, pp. 476-477) l'intera dimostrazione del presente opuscolo, giudicandola evidentemente di un certo interesse storico e matematico. Nella stessa opera egli sostiene (vol. 4°, p. 513, p. 1087) che *coordinate polari* sia un'espressione coniata in Italia individuando nel Fontana il primo matematico ad utilizzarla nella dissertazione *Sopra l'equazione di una curva, sopra la falsità di due famosi Teoremi, e sopra le serie armoniche a termini infinitamente piccoli* (*Memorie di Matematica e Fisica della Società Italiana delle Scienze*, to. II, Verona 1784, per Dionigi Ramanzini).

parte teorica ed il primo esempio di applicazione della stessa, lasciando da parte il secondo ed il terzo dei quali abbiamo sopra nominato gli argomenti[56].

La formula differenziale del raggio osculatore delle curve riferite al centro si trova in quasi tutti gli scrittori di Calcolo Differenziale, trovata certamente in modo acuto e ricavata ingegnosamente dalla natura di queste curve; ma nessuno finora, che io sappia, si propose di estrapolarla dall'altra formula del raggio osculatore delle curve riferite all'asse; tuttavia quella viene dedotta da questa così elegantemente e con tale chiarezza, che viene da chiedersi come mai non ci avessero pensato capacissimi scrittori analitici. Dunque mi sono proposto di derivare da lì la formula stessa e di ricavare con un nuovo metodo la formula generale per l'evoluta delle curve. Sia dunque:

<u>Problema I</u> *Trovare un metodo per dedurre la formula del raggio osculatore in una curva riferita al fuoco a partire dalla formula data per lo stesso in curve riferite all'asse.*
<u>Soluzione</u> *Sia (Fig. V) la curva ABC riferita al fuoco D, della quale si vuol trovare il raggio osculatore in base alla formula data per la curva riferita all'asse. Si chiami* $\overline{BD}$ *z ed* $\overline{nC}$ *dz e poi si costruisca per du l'arco infinitesimo Bn di centro D, descritto dall'intervallo* $\overline{DB}$. *Si prenda la stessa curva ABC riferita ad un qualunque asse DF che passi per il fuoco D. Si chiamino* $\overline{DE}$ *x,* $\overline{BE}$ *y,* $\overline{EF}$ *dx,* $\overline{Cm}$ *dy. I triangoli rettangoli BnC, BmC e BED forniscono due equazioni* $dx^2+dy^2=dz^2+du^2$ *e* $z^2=x^2+y^2$, *con l'aiuto delle quali si deve trovare il raggio osculatore dato in z e du. Per ottenere ciò, nella formula generale del raggio osculatore per curve riferite all'asse, cioè in* $\frac{\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x-dxd^2y}$ *conviene sostituire al posto di dx, dy,* d^2x, d^2y *i loro valori ricavati dalle due equazioni suddette. Perciò a* $\left(dx^2+dy^2\right)^{\frac{3}{2}}$ *si sostituisca* $\left(du^2+dz^2\right)^{\frac{3}{2}}$, *come deriva da esse. Poi per ricavare il valore della quantità* dyd^2x-dxd^2y, *bisogna notare che questa quantità è uguale all'altra* $\frac{\left(dyd^2x-dxd^2y\right)dy^2}{dy^2}$ *(I), che esprime il differenziale della quantità* $\frac{dx}{dy}$ *moltiplicato per* dy^2; *e perciò cerco dapprima i valori delle stesse dx e dy, trovati i quali si ottiene subito il valore* dyd^2x-dxd^2y *espresso solo per z, du e la loro differenza. Si faccia dunque il differenziale dell'equazione* $z^2=x^2+y^2$, *e sarà* $zdz=xdx+ydy$, *da cui* $dy=\frac{zdz-xdx}{y}$. *Se codesto valore viene sostituito nella prima equazione* $dx^2+dy^2=dz^2+du^2$, *si otterrà* $y^2dx^2+z^2dz^2-2zxdxdz+x^2dx^2=\left(dz^2+du^2\right)y^2$, *cioè* $\left(z^2-y^2\right)dz^2-2zxdxdz+\left(y^2+x^2\right)dx^2=y^2du^2$; *ma* $z^2-y^2=x^2$ *e* $y^2+x^2=z^2$; *quindi fatta la sostituzione nell'equazione appena trovata risulta* $x^2dz^2-2zxdxdz+z^2dx^2=y^2du^2$; *ed estratte le radici si ottiene un'altra equazione* $xdz-zdx=\pm ydu$, *dalla quale si de-*

[56] Le pagine che riportiamo corrispondono alle p. 120-128 del testo originale; i disegni a cui si riferisce l'autore si trovano nella figura originale riportata più sopra. Ricordiamo che è nostra la traduzione dalla stampa originale.

duce che $dx = \frac{xdz \mp ydu}{z}$. *Poiché certamente* $zdz - xdx = ydy$, *sostituito in questa in valore dello stesso dx appena trovato si ottiene* $\frac{z^2dz - x^2dz \pm xydu}{z} = ydy$, *nella quale poi sostituita la quantità* $(z^2 - x^2)$ *con* y^2, *si conclude che* $\frac{ydz \pm xdu}{z} = dy$. *Ora si faccia* $\frac{dx}{dy} = \frac{xdz \mp ydu}{ydz \pm xdu}$. *Come è stato già riconosciuto, per quanto riguarda i segni, da cui dipendono le quantità* ydu *e* xdu, *se siano da intendere positivi o negativi, sarà sufficiente valutare se nell'equazione* $xdz - zdx = \pm ydu$ *la quantità* xdz *sia maggiore o minore di* zdx; *da ciò infatti risulterà subito il segno della quantità* ydu, *che è la differenza dei primi due. Per arrivare a questo aiutano i triangoli simili Brn e Crm. Così sarà* $\overline{Br} : \overline{Cr} = \overline{nr} : \overline{rm}$ *e componendo* $\overline{Br} + \overline{Cr} : \overline{nr} + \overline{rm} = \overline{Br} : \overline{nr}$; *e da qui* $\overline{nr} + \overline{Cr} : \overline{Br} + \overline{rm} < \overline{Br} : \overline{nr}$ *o* $\overline{Cn} : \overline{Bm} < \overline{Br} : \overline{nr}$; *ma per i triangoli simili Brn e BDE è* $\overline{Br} : \overline{nr} = \overline{BD} : \overline{DE}$; *quindi sarà anche* $\overline{Cn} : \overline{Bm} < \overline{BD} : \overline{DE}$, *o* $dz : dx < z : x$, *come pure* $xdz < zdx$ *e quindi* $xdz - zdx = -ydu$. *Da questo è facile concludere che nelle quantità ydu e xdu si può ottenere solo il segno negativo. Sarà allora* $\frac{dx}{dy} = \frac{xdz + ydu}{ydz - xdu}$ *e differenziata la stessa* $\frac{dx}{dy}$ *dopo la riduzione dei termini si trova che risulta:*

$$\frac{(ydx - xdy)(du^2 + dz^2) + (y^2 + x^2)dzd^2u - (x^2 + y^2)dud^2z}{(ydz - xdu)^2} \quad (II).$$

Ora poi da quanto sopra è $dx = \frac{xdz + ydu}{z}$ *e* $dy = \frac{ydz + xdu}{z}$, *ed anche* $ydx - xdy = \frac{y^2du + x^2du}{z} = \frac{z^2du}{z} = zdu$; *se dunque nell'equazione (II) al posto di* $ydx - xdy$ *si sostituisce* zdu *e* z^2 *invece di* $(y^2 + x^2)$ *si troverà che il differenziale dello stesso* $\frac{dx}{dy}$ *è* $\frac{zdu(du^2 + dz^2) + z^2dzd^2u - z^2dud^2z}{(ydz - xdu)^2}$ *e moltiplicando per* dy^2 *per avere la formula iniziale (I), o* $\frac{(ydz - xdu)^2}{z^2}$, *si ricaverà il differenziale dello stesso* $\frac{dx}{dy}$ *moltiplicato per* dy^2, *cioè* $dyd^2x - dxd^2y = \frac{du(du^2 + dz^2) + zdzd^2u - zdud^2z}{z}$, *e infine*:

$$\frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dyd^2x - dxd^2y} = \frac{z(du^2 + dz^2)^{\frac{3}{2}}}{zdzd^2u - zdud^2z + du(dz^2 + du^2)}.$$

E' stata così ricavata la formula del raggio osculatore per una curva rispetto al fuoco dalla formula dello stesso data per una curva rispetto all'asse. Q.E.I.

Determinato il raggio osculatore delle curve riferite al centro conviene trovare ora l'evoluta di quelle stesse curve, con un metodo nuovo ed abbreviato.

Sia allora

<u>Problema II</u> *Determinare l'evoluta della curva KAD relativa al centro B.*

<u>Soluzione</u> *Sia* $\overline{AE}$ *il raggio osculatore della curva KAD (Figura VI), che tocca l'evoluta in E, ed il punto E sarà nell'evoluta HEO. Si riferisca la stessa HEO al fuoco B e si chiami q l'inclinata BE, dp l'arco infinitesimo GE. Per ricavare l'equazione di questa curva come vogliamo, sarà sufficiente trovare la*

relazione delle stesse $\overline{GO}$ *e GE date per* $\overline{BE}$, *o dq e dp per q. Si estrapoli il raggio osculatore* $\overline{AE}$ *per P (Problema I), il cui valore si ricava dalla formula generale* $\dfrac{z(du^2+dz^2)^{\frac{3}{2}}}{-zdud^2z+zdzd^2u+du(dz^2+du^2)}$, *sostituendo al posto di du e* d^2u *i loro valori dati per z, dz e* d^2z *dall'equazione della curva KAD; e risulterà P dato solo in z, e costanti. Si tracci dal fuoco B la perpendicolare* $\overline{BF}$ *al raggio osculatore* $\overline{AE}$. *Per i triangoli simili ACD e BAF sarà:*

$$\overline{AD}\left[\sqrt{dz^2+du^2}\right]:\overline{AC}[du]=\overline{AB}[z]:\overline{AF}\left[\frac{zdu}{\sqrt{dz^2+du^2}}\right];$$

ed anche $$\overline{AD}\left[\sqrt{dz^2+du^2}\right]:\overline{DC}[dz]=\overline{BA}[z]:\overline{BF}\left[\frac{zdz}{\sqrt{dz^2+du^2}}\right].$$

Quindi $\overline{FE}=\overline{AE}-\overline{AF}=P-\dfrac{zdu}{\sqrt{dz^2+du^2}}$, *e si chiami N, che sarà dato solo per z.* $\overline{BF}=\dfrac{zdz}{\sqrt{dz^2+du^2}}$, *anch'esso dato per z, si chiami M. Sarà pertanto* $\overline{BE}=q=\sqrt{N^2+M^2}$ *parimenti espressa per z. Sia ora* $\overline{DO}$ *il raggio osculatore infinitamente vicino all'altro. L'arco minimo EO, come è chiaro, è pari alla differenza dei raggi infinitamente prossimi* $\overline{DO}$ *e* $\overline{AE}$, *o all'incremento dello stesso* $\overline{AE}$, *senza dubbio dP. Così costruiti i triangoli simili EGO e BFE forniscono l'analogia*

$$\overline{BE}\left[\sqrt{N^2-M^2}\right]:\overline{BF}[M]=\overline{EO}[dP]:\overline{EG}\left[\frac{M\,dP}{\sqrt{N^2+M^2}}\right].$$

Si è dunque trovato il valore dello stesso EG, o dp dato per z, dz e $\overline{BE}$, *o q dato solo per z. Se ora viene sostituito nell'equazione che esprime la relazione tra dp e z il valore dello stesso z appena trovato, si ottiene un'altra equazione, che dipende solo da q e da dp; e così si otterrà l'equazione dell'evoluta HEO per qualunque caso. E' stato così fatto ciò che veniva richiesto. Illustriamo il metodo con qualche esempio.*

Esempio *Sia la curva KAD una spirale logaritmica, la cui equazione è* $du=\dfrac{adz}{b}$. *Sia da trovare l'evoluta HEO della stessa spirale. Poiché* $du=\dfrac{adz}{b}$, *sarà* $du^2=\dfrac{a^2dz^2}{b^2}$ *e* $d^2u=\dfrac{ad^2z}{b}$, *che sostituite nella formula del raggio osculatore danno:*

$$\frac{z\left(\dfrac{dz^2+a^2dz^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{-\dfrac{azdzd^2z}{b}+\dfrac{azdzd^2z}{b}+\dfrac{adz}{b}\left(dz^2+\dfrac{a^2dz^2}{b^2}\right)}=\frac{z\left(\dfrac{dz^2+a^2dz^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{adz}{b}\left(dz^2+\dfrac{a^2dz^2}{b^2}\right)}=\frac{z}{a}\sqrt{b^2+a^2}=P$$

Quindi $$\overline{FE}=P-\frac{zdu}{\sqrt{dz^2+du^2}}=\frac{z}{a}\sqrt{b^2+a^2}-\frac{azdz}{b\sqrt{dz^2+\dfrac{a^2dz^2}{b^2}}}=\frac{z}{a}\sqrt{b^2+a^2}-\frac{az}{\sqrt{b^2+a^2}}=N\ ;$$

$$\overline{BF}=\frac{zdz}{\sqrt{dz^2+du^2}}=\frac{bz}{\sqrt{b^2+a^2}}=M\ ; \qquad z=\frac{aq}{b}\ ;$$

$$\overline{BE}=\sqrt{N^2+M^2}=\sqrt{\frac{z^2}{a^2}(b^2+a^2)-2z^2+\frac{a^2z^2}{b^2+a^2}+\frac{b^2z^2}{b^2+a^2}}=\frac{bz}{a}=q\ .$$

E' invece $\overline{BE}:\overline{BF}=\overline{EO}:\overline{EG}$, $EG = dp$ *o* $\frac{bz}{a}:\frac{bz}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{dz}{a}\sqrt{b^2+a^2}:dz$, *quindi* $dp = dz = \frac{adq}{b}$. *Invero l'equazione* $dp = \frac{adq}{b}$ *per l'evoluta HEO è la stessa della spirale logaritmica, come è chiaro; perciò l'evoluta della spirale logaritmica è una spirale uguale e simile alla prima.*

Ringraziamenti

Nel concludere questo scritto, mi sia consentito dedicare un sincero ringraziamento al Prof. Italo Tamanini dell'Università di Trento per la generosa disponibilità ed il prezioso aiuto offerti nel corso dell'intero lavoro; un pensiero anche al Prof. Renato Mazzolini dell'Università di Trento per gli utili consigli.

Indirizzo dell'autore:
Dr. Stefano Coser, Via Zotti 18, I-38068 Rovereto (TN), Italia