Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

CCLXXIII ANNO ACCADEMICO
2023 ser. X, vol. V, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

SCRIPTA EDIZIONI

Giacomo Principato

Sulla legge di Biot-Savart relativistica

Abstract: The Biot-Savart law is generalized to the relativistic case, considering an infinite current-carrying wire arranged perpendicular to the speed. Its application allows us to obtain the correct expression of the magnetic field of a current-carrying coil with an axis parallel to the speed, which cannot be deduced in a similar way to the cases widely treated in the literature such as those of the current-carrying wire arranged parallel to the speed or of the solenoid in motion with his axis parallel to the speed, and whose analysis is essentially based on time dilation and length contraction.

Key words: Magnetism, Relativity

Riassunto: Viene generalizzata la legge di Biot-Savart al caso relativistico, considerando un filo infinito percorso da corrente e disposto perpendicolarmente alla velocità. La sua applicazione consente di ricavare la corretta espressione del campo magnetico di una spira percorsa da corrente con asse parallelo alla velocità, non deducibile in modo analogo ai casi ampiamente trattati in letteratura quali quelli del filo percorso da corrente e disposto parallelamente alla velocità o del solenoide in moto con asse parallelo alla velocità, e la cui analisi si basa sostanzialmente sulla dilatazione del tempo e la contrazione delle lunghezze.

Parole chiave: Magnetismo, Relatività

È ampia in letteratura l'analisi dei campi elettrici e magnetici statici in differenti sistemi di riferimento inerziali. Ad esempio la presenza di un campo elettrico in un sistema di riferimento differente da uno nel quale il filo, percorso da corrente, è neutro, o l'invarianza del campo magnetico generato da un solenoide, sono dettagliatamente e elegantemente spiegati da Purcell (Purcell, 1980), e le relative considerazioni riprese in maniera sostanzialmente analoga in vari testi (Principato, 2024 - Resnick, 1979) e articoli. In entrambi i casi citati sia il filo sia il solenoide sono considerati il primo disposto paralle-

Giacomo Principato, Liceo Scientifico Statale "G. Galilei", Palermo.

lamente alla velocità, il secondo con asse parallelo alla velocità. Sorgono però problemi nell'interpretazione dei campi nei casi di un filo in moto e disposto perpendicolarmente alla velocità, o una spira in moto con asse parallelo alla velocità'. Questi casi possono essere risolti riscrivendo, per i particolari casi di seguito analizzati, la legge di Biot-Savart in termini relativistici.

Campo magnetico di un filo parallelo alla velocità

Consideriamo un filo infinito disposto orizzontalmente (lungo l'asse x) e a riposo rispetto ad un sistema di riferimento inerziale S_0, percorso da corrente i_0. Il modulo B_0 del campo magnetico vale:

$$B_0 = \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r_0}$$

Si consideri adesso un sistema di riferimento inerziale S rispetto al quale il filo è in moto con velocità orizzontale di modulo u (lungo l'asse x). In questo caso la corrente i è pari a:

$$i = \gamma i_0 \tag{1}$$

e il modulo B del campo magnetico:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{2}$$

con γ *fattore di dilatazione* e $r = r_0$ in quanto distanze perpendicolari alla direzione del moto.

In letteratura è prassi arrivare ai risultati (1) e (2) solo attraverso considerazioni relativistiche (dilatazione del tempo, contrazione della lunghezza).

Analogamente al caso classico, la (2) può però anche essere ricavata direttamente dalla legge di Biot-Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\vec{\ell} \times \vec{d}}{d^3}$$

che, nel caso considerato, non necessita di alcuna modifica quando scritta rispetto a S.

Campo magnetico di un filo perpendicolare alla velocità (a)

Consideriamo un filo infinito coincidente con l'asse z (verticale). È noto che rispetto a S_0 il campo magnetico in un punto P di coordinate $(0\,;y_0\,;0)$ vale:

$$B_{0,x} = \frac{\mu_0\, i_0}{2\pi\, y_0}$$

Consideriamo il sistema di riferimento inerziale S del caso 1. La distanza OP risulta inalterata, in quanto perpendicolare alla velocità, quindi:

$$y = y_0 \tag{3}$$

Per la *dilatazione del tempo* in questo caso vale (a differenza della (1)) la seguente:

$$i = \frac{i_0}{\gamma} \tag{4}$$

Otteniamo pertanto:

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2\pi\, y} = \frac{\mu_0 i_0}{\gamma \cdot 2\pi\, y_0} = \frac{B_{0,x}}{\gamma} < B_{0,x} \tag{5}$$

in contraddizione con la nota legge relativistica di trasformazione del campo magnetico parallelo alla direzione del moto:

$$B_x = B_{0,x} \tag{6}$$

Analogamente, consideriamo adesso un punto P di coordinate $(x_0\,;0\,;0)$. È noto che vale la seguente:

$$B_{0,y} = \frac{\mu_0\, i_0}{2\pi\, x_0}$$

In questo caso rispetto a S, oltre a valere la (4), la distanza $x = OP$ risulta contratta, in quanto parallela alla velocità:

$$x = \frac{x_0}{\gamma} \tag{7}$$

per cui risulta:

$$B_y = \frac{\mu_0 \, i}{2\pi \, x} = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi \, x_0} = B_{0,y} \tag{8}$$

in contraddizione con la nota legge relativistica di trasformazione del campo magnetico perpendicolare alla direzione del moto:

$$B_y = \gamma \cdot B_{0,y} \tag{9}$$

Campo magnetico di un filo perpendicolare alla velocità (b)

Per risolvere queste incongruenze ((5) vs (6), (8) vs (9)) occorre, in questo caso, modificare la legge di Biot-Savart classica, imponendo le condizioni (6) e (9).

Allo scopo consideriamo in S_0 un generico punto $P(x_0 \, ; y_0 \, ; 0)$. Le componenti del campo magnetico valgono:

$$B_{0,x} = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi} \cdot \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2} \qquad \text{e} \qquad B_{0,y} = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi} \cdot \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

Rispetto a S, dalla (6) otteniamo:

$$B_x = B_{0,x} = \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi} \cdot \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

e per le (3), (4) e (7)

$$B_x = \gamma \cdot \frac{\mu_0 \, i}{2\pi} \cdot \frac{y}{\gamma^2 x^2 + y^2} \tag{10}$$

Rispetto a S, dalla (9) otteniamo:

$$B_y = \gamma \cdot B_{0,y} = \gamma \cdot \frac{\mu_0 \, i_0}{2\pi} \cdot \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

e per le (3), (4) e (7)

$$B_y = \gamma \cdot \frac{\mu_0 \, i}{2\pi} \cdot \frac{\gamma^2 x}{\gamma^2 x^2 + y^2} \tag{11}$$

Componendo infine la (10) e la (11):

$$B = \gamma \cdot \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \frac{\sqrt{\gamma^4 x^2 + y^2}}{\gamma^2 x^2 + y^2} \tag{12}$$

B è il modulo del campo magnetico tangente alla generica linea di campo ellittica di equazione:

$$\gamma^2 x^2 + y^2 = r_0^2$$

(ottenuta considerando che rispetto a S_0 le linee di campo sono circonferenze di raggio r_0).

La (10) può essere ottenuta riscrivendo la legge di Biot-Savart rispetto a S nel modo seguente:

$$dB_x = \gamma \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cdot \sin\alpha}{d^2} \cdot \cos\vartheta \tag{13}$$

con

$$d\ell = dz$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2}}{\sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d = \sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos\vartheta = \frac{y}{\sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2}}$$

Sostituendo nella (13) otteniamo:

$$dB_x = \gamma \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{y}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dz \tag{14}$$

che integrata in z fornisce la (10).

Analogamente la (11) può essere ottenuta riscrivendo la legge di Biot-Savart rispetto a S nel modo seguente:

$$dB_y = \gamma^2 \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cdot \sin\alpha}{d^2} \cdot \sin\vartheta \tag{15}$$

con

$$\sin\vartheta = \frac{\gamma x}{\sqrt{\gamma^2 x^2 + y^2}}$$

Effettuando nella (15) le sostituzioni sopraelencate otteniamo:

$$dB_y = \gamma^2 \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{\gamma x}{\left(\gamma^2 x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}} dz$$

che integrata in z fornisce la (11).

Dalle (13) e (15) ricaviamo (per il caso considerato) l'espressione generale della legge di Biot-Savart:

$$dB = \gamma \cdot \sqrt{\cos^2\vartheta + \gamma^2 \sin^2\vartheta} \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{d\ell \cdot \sin\alpha}{d^2} \tag{16}$$

Campo magnetico di una spira e di un solenoide con asse parallelo alla velocità

Consideriamo una spira circolare di raggio R, ferma rispetto a S_0, con asse parallelo all'asse x e centro coincidente con l'origine O degli assi cartesiani $x\,y\,z$. È noto che il campo magnetico in un punto P di coordinate $(x_0\,;0\,;0)$, quindi appartenente all'asse della spira, è pari a:

$$B_{0,x} = \frac{\mu_0 i_0 \cdot R_0^2}{2 \cdot \left(x_0^2 + R_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e nel suo centro $(x = 0)$

$$B_{0,x} = \frac{\mu_0 i_0}{2R_0}$$

con

$$R_0 = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$$

Consideriamo il sistema di riferimento inerziale S. Essendo gli assi y e z perpendicolari alla velocità non si ha alcuna contrazione della spira, risultando

$$R = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{y_0^2 + z_0^2} = R_0$$

Il campo magnetico della spira, considerando la (4), risulterebbe quindi:

$$B_x = \frac{\mu_0 i}{2R} = \frac{\mu_0 i_0}{\gamma \cdot 2R_0} < B_{0,x}$$

in contraddizione con la (6).

Applichiamo la (14) per risolvere questa incongruenza. Consideriamo questa volta la spira appartenente al piano yz, con centro di coordinate $(0\,;\,y\,;\,0)$ e passante per l'origine, sì da risultare:

$$y = R$$

Otteniamo il campo magnetico in un punto generico di coordinate $(x\,;\,y\,;\,0)$ prodotto dall'elemento infinitesimo di filo passante per l'origine ponendo $z = 0$ nella (14):

$$dB_x = \gamma \cdot \frac{\mu_0 i}{4\pi} \cdot \frac{R}{\left(\gamma^2 x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} d\ell$$

e integrando lungo la circonferenza:

$$B_x = \gamma \cdot \frac{\mu_0 i}{2} \cdot \frac{R^2}{\left(\gamma^2 x^2 + R^2\right)^{\frac{3}{2}}} \tag{17}$$

Ponendo $x = 0$ la (6) risulta verificata.

È semplice inoltre verificare che dalla (17), sommando i contributi di infinite spire coassiali, si ricava la corretta espressione del campo magnetico di un solenoide (con asse parallelo alla velocità) rispetto a S.

Conclusioni

Le proposte di modifica avanzate derivano strettamente dalle leggi di trasformazioni del campo magnetico ((6) e (9)), e riescono a risolvere le incongruenze mostrate, relative ai campi magnetici di un filo infinito in moto e disposto perpendicolarmente alla velocità e di una spira in moto con asse parallelo alla velocità. Esse conducono ad una generalizzazione della legge di Biot-Savart secondo la (16). Occorre naturalmente verificarne la validità anche in altri casi ed eventualmente esprimerla in forma vettoriale.

Bibliografia

Principato G. 2024, *Corso zero di Relatività Ristretta*, Edizioni Del Faro.
Purcell E.M., 1980, *Elettricità e Magnetismo*, 2, *Zanichelli.*
Resnick R., 1979, *Introduzione alla Relatività Ristretta*, C.E.A. Milano.