Francesco Prandel

Un'analogia idraulica per il campo quantistico

Abstract: This article qualitatively illustrates and examines a singular phenomenon that can be observed in a fountain, and proposes it as a metaphor for the quantum field.

Key words: Quanta, Quantum Field

Riassunto: Questo articolo illustra ed esamina qualitativamente un singolare fenomeno che si può osservare in una fontana, e lo propone come metafora del campo quantistico.

Parole chiave: Quanti, Campo quantistico

> Il "quanto" è un particolare aspetto di questo campo, che emerge, con caratteristiche rigorosamente definite, tutte le volte che il campo viene in qualche modo sondato da altri campi, tutte le volte che c'è un trasferimento di energia da un campo all'altro. […] È quindi finalmente comprensibile perché la MQ non è, né può essere una teoria completa, giacché considera i "quanti" indipendentemente dal campo quantistico cui appartengono, ed è pure finalmente comprensibile come onda e particella non siano nozioni "complementari", ma semplicemente diversi caratteri delle manifestazioni fenomeniche di un'unica entità: il campo quantistico.
>
> *Giuliano Preparata*

Francesco Prandel, franz.prandel@gmail.com

Alcuni testi che trattano la Teoria Quantistica dei Campi a livello divulgativo propongono al lettore di immaginare il campo quantistico come un lago perennemente agitato. Nei termini di questa metafora i quanti vengono paragonati alle gocce d'acqua che si formano sopra i suoi flutti e vi si riassorbono presto, dunque interpretati come manifestazioni *localizzate* ed *effimere* del campo quantistico, altrimenti *delocalizzato* e *persistente*. In questo articolo proviamo ad estendere questa analogia per fornire qualche particolare in più.

Osservando che cosa accade in una fontana, si può notare un fenomeno per certi versi sorprendente. Se lo zampillo d'acqua è abbastanza vigoroso, nella zona in cui si immerge è possibile osservare non solo la formazione di gocce che schizzano verso l'alto percorrendo un arco parabolico, per poi ricadere nel corpo del liquido. Né ci riferiamo alle bolle d'aria, che risalgono in superficie e si allontanano radialmente dal getto per svanire dopo aver percorso pochi centimetri, probabilmente a causa del moto ondoso che le sollecita. Seppur più raramente, si osserva anche la formazione di minuscole gocce, con diametro variabile da due a cinque millimetri circa, che si dipartono dalla zona in cui lo zampillo fa ribollire l'acqua e corrono sulla sua superficie agitata per vari decimetri, prima di riassorbirvisi. Alcune, in genere quelle di medie dimensioni, riescono persino a raggiungere i bordi della fontana. Parte di queste, in seguito all'urto, si dissolvono rientrando nel corpo del liquido. Alcune, riescono addirittura a rimbalzare sulle pareti della fontana, e a percorrere ancora una manciata di centimetri prima di confondersi nuovamente con l'acqua sottostante.[1]

Nei primi anni di scuola ogni studente impara che i liquidi hanno un *volume proprio*, ma non hanno una *forma propria*. Naturalmente, la seconda affermazione è valida per i liquidi sottoposti al campo gravitazionale, che li spinge sul fondo del recipiente costringendoli ad assumerne la forma. Come è noto, in assenza di gravità, o nelle condizioni in cui la gravità non si fa sentire, o nei casi in cui essa non prevale sulle altre forze in gioco, i liquidi tendono ad assumere la forma sferica, quella che minimizza la superficie rispetto al volume. Ciò risulta evidente se si pensa alle bolle d'acqua come si presentano agli astronauti nei veicoli spaziali in orbita, le quali oscillano rispetto alla forma di equilibrio, o alle gocce di pioggia mentre cadono, deformate solamente dall'attrito con l'aria, o alle gocce di rugiada su una foglia, che deviano dalla forma sferica in ragione delle loro dimensioni.

[1] In letteratura, sotto la voce "bouncing droplets", sono reperibili diversi lavori che indagano fenomeni analoghi. In luogo dell'acqua, gli esperimenti descritti e discussi da questi articoli utilizzano in genere olio siliconico. Si veda, ad esempio, Brady, Anderson, 2014.

Le gocce che corrono sulla superficie dell'acqua in una fontana destano meraviglia perché mantengono il loro carattere *individuale* per un tempo apprezzabile, pur essendo a stretto contatto con il liquido soggiacente. Non abbiamo qui la pretesa di esaminare il fenomeno da un punto di vista quantitativo, il ché richiederebbe di analizzarlo in termini di *tensione superficiale*. Ci limitiamo a constatare che le gocce in questione:

1. presentano una *forma sferica*, o comunque una forma approssimativamente ellissoidale che devia dalla forma sferica in ragione delle sollecitazioni cui le sottopone il moto ondoso dell'acqua sottostante;
2. presentano una certa *stabilità* rispetto al corpo del liquido da cui emergono e che le riassorbe, o almeno così sembra dal momento che persistono sulla sua superficie per un tempo finito ma non infinitesimo.

Questi due aspetti convergono nel fatto che la forma sferica è la forma *massimamente simmetrica* nello spazio euclideo tridimensionale, e dunque la forma più *stabile* che un liquido può assumere proprio a causa delle forze attrattive che ne legano gli atomi (nel caso del mercurio) o le molecole (nel caso dell'acqua), e in virtù dall'agitazione termica che inibisce il processo di cristallizzazione. Con l'intento di proporre un'analogia tra il sistema descritto e il campo quantistico, occorre allora individuare la forma massimamente simmetrica di quest'ultimo.

In assenza di potenziali, le soluzioni particolari dell'equazione di Dirac possono essere fattorizzate in una parte matriciale – che esprime il loro carattere spinoriale – e in una parte esponenziale complessa – che esprime la loro oscillazione nel tempo e nello spazio. La soluzione generale per la cosiddetta "particella libera" corrisponde pertanto alla combinazione lineare normale delle soluzioni particolari, i cui pesi vengono assegnati dalla relativa trasformata di Fourier. In un certo senso sembra dunque possibile affermare che la particella libera "vive" tra lo spazio delle posizioni e quello dei momenti.

> Si può guardare il mondo con l'occhio-*p* e lo si può guardare con l'occhio-*q*, ma se si aprono entrambi gli occhi insieme, si ha una visione confusa.
>
> *Wolfgang Pauli*

In quest'ottica, la forma più simmetrica che la particella libera può assumere corrisponde alla *distribuzione gaussiana* (il quadrato del cui modulo corrisponde alla *distribuzione normale*), cioè all'autofunzione della trasformata di

Fourier relativa all'autovalore unitario, positivo e reale, che ha la stessa forma nello spazio delle posizioni e in quello dei momenti.[2]

Come noto, la distribuzione gaussiana satura le disuguaglianze che esprimono il principio di indeterminazione di Heisenberg, cioè *minimizza* il prodotto delle varianze delle variabili coniugate. La distribuzione gaussiana è *localizzata* nel senso che il suo modulo quadro è significativamente diverso da zero solo entro un intervallo limitato del suo supporto, ed è *delocalizzata* nel senso che il suo modulo quadro tende a zero in maniera asintotica.

Per le proprietà della trasformata di Fourier, nella misura in cui il pacchetto gaussiano si allarga nello spazio delle posizioni, nella stessa misura si contrae in quello dei momenti, e viceversa. Sembra dunque possibile ipotizzare che il pacchetto gaussiano oscilli attorno alla sua forma di equilibrio, quella massimamente simmetrica e dunque presumibilmente più stabile, cioè quella in cui la varianza della posizione e la varianza dei numeri d'onda valgono entrambe 1/2 (per cui il prodotto della deviazione standard della posizione e quella dei momenti assume il valore minimo $\hbar/2$).

Una *generica* sovrapposizione delle funzioni che risolvono l'equazione di Dirac presenta massimi di intensità dove queste interferiscono costruttivamente, mentre la sua intensità assume valori trascurabili – al limite nulli – dove la loro interferenza risulta distruttiva. Sembra dunque ragionevole ipotizzare che, se la distribuzione gaussiana rappresenta effettivamente una forma particolarmente stabile del campo, questo la assuma con maggior probabilità in corrispondenza dei propri massimi, che ne approssimano la forma e ne assimilano la coerenza di fase, e dunque con minor probabilità in corrispondenza dei propri minimi. In quest'ottica, l'interpretazione *statistica* che la meccanica quantistica assegna alla funzione d'onda sembrerebbe potersi ricondurre alla *tendenza* del campo quantistico (delocalizzato) a "cadere" (localmente) nella "buca" rappresentata dalla distribuzione gaussiana, e a permanervi fino a quando l'oscillazione attorno alla distribuzione di equilibrio non venga perturbata e interdetta dall'evoluzione del campo soggiacente. Da questo punto di vista non si avrebbe alcun "collasso" della funzione d'onda, anche perché, come sopra considerato, pur presentando un massimo assoluto la funzione gaussiana è diversa da zero in ogni punto del dominio.

A conclusione di queste considerazioni, riteniamo doveroso avvertire il

---

[2] Con ciò intendiamo affermare che – al netto della permutazione dei simboli x e p – la distribuzione gaussiana e la sua trasformata di Fourier sono la *medesima* funzione. In questi termini, lo smorzamento gaussiano del polinomio di Hermite di grado n è l'autofunzione della trasformata di Fourier relativa all'autovalore i^n.

Lettore che chi scrive non ha la conoscenza necessaria a trattare credibilmente l'argomento. Le congetture qui avanzate debbono pertanto ritenersi frutto della fantasia dell'autore, più che della sua effettiva competenza in materia. Invitiamo pertanto il Lettore a prenderle con la dovuta cautela e con il necessario spirito critico.

Bibliografia

Brady R., Anderson R., 2014, *Why bouncing droplets are a pretty good model of quantum mechanics*, "arxiv.org/pdf/1401.4356"