

Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

CCLXXIII ANNO ACCADEMICO

2023 ser. X, vol. V, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali



SCRIPTA EDIZIONI

Luca Salasnich

Densità degli stati, entropia ed energia libera nel buco nero di Schwarzschild

ABSTRACT: Given a quantum system, its density of states W can be calculated by using the quantum Hamiltonian operator \hat{H} of the system itself. Unfortunately in some cases this approach is quite intricate and in other cases it is even impossible. On the other hand, W can be deduced from the entropy S in the microcanonical ensemble, or from the Helmholtz free energy F in the canonical ensemble. We apply these thermodynamic results to analyze the density of the microcanonical states W of a Schwarzschild black hole, which has the problem of calculating W directly from \hat{H} , given that the concept of Hamiltonian operator \hat{H} is non-trivial in the case of black holes, and more generally in quantum gravity.

KEY WORDS: Density of states, entropy, free energy, black holes

RIASSUNTO: Dato un sistema quantistico macroscopico, la sua densità degli stati W può essere calcolata utilizzando l'operatore hamiltoniano quantistico \hat{H} del sistema stesso. Sfortunatamente in alcuni casi questo approccio è piuttosto macchinoso ed in altri è addirittura impossibile. In alternativa, W può essere dedotta dall'entropia S nell'insieme statistico microcanonico oppure dalla energia libera di Helmholtz F nell'insieme canonico. Utilizzeremo questi risultati termodinamici per analizzare la densità degli stati W di un buco nero di Schwarzschild, che presenta proprio il problema di calcolare W direttamente da \hat{H} , dato che il concetto di operatore hamiltoniano \hat{H} è non banale nel caso dei buchi neri, e più in generale in gravità quantistica.

PAROLE CHIAVE: Densità degli stati, entropia, energia libera, buchi neri.

I. Introduzione

La densità degli stati W appare in molti contesti della meccanica statistica (Huang, 1997) e della fisica quantistica (Landau, Lifshitz, 2011). Dato un sistema macroscopico, W ci dice quanti microstati, o stati quantistici microscopici, esistono in un determinato intervallo di energia. La densità degli stati W è estremamente utile nella determinazione sperimentale e teorica di diverse grandezze fisiche (Huang, 1997 - Landau, Lifshitz, 2011). In alcuni casi si ha a che fare con la densità di stati di una singola particella quantistica in presenza di un potenziale esterno, dove il calcolo esplicito a partire dall'operatore hamiltoniano è solitamente abbastanza semplice. Invece, il calcolo esplicito della densità di un problema a molti corpi, cioè la densità di stati di un sistema composto da molte particelle quantistiche interagenti, è di solito un compito piuttosto difficile. Comunque, la densità di stati può anche essere ricavata a partire dalla entropia microcanonica oppure a partire dalla funzione di partizione nell'insieme canonico. Come è noto, nel limite termodinamico, le osservabili microcanoniche possono essere correlate a quelle corrispondenti canoniche per mezzo di una trasformata di Legendre (Huang, 1997).

In questo contributo discutiamo una tecnica semplice per ricavare la densità di stati W a partire dalla energia libera di Helmholtz. Questa procedura non è altro che una trasformata di Legendre dell'entropia dall'insieme canonico all'insieme microcanonico. Come applicazione, nella seconda parte del lavoro discutiamo la densità di stati, e altre grandezze termodinamiche, del caso del buco nero di Schwarzschild. Attualmente, anche per i teorici della materia condensata (Sachdev, 2022) lo studio della termodinamica dei buchi neri è un argomento molto interessante, dato che in effetti si presta a fruttuose connessioni tra diversi settori della Fisica.

II. Proprietà generali della densità degli stati

A. Insieme statico microcanonico

Consideriamo un sistema quantistico con hamiltoniana microscopica \hat{H} ed energia interna compresa tra E ed $E+\Delta$, con $\Delta \ll E$ (Huang, 1997). Assumiamo di operare nell'insieme statistico microcanonico di Gibbs, dove il sistema è isolato, senza scambio di energia e particelle con l'ambiente esterno e con volume fissato (Huang, 1997). Sostanzialmente l'energia interna E , il numero N di particelle ed il volume V sono le variabili termodinamiche indipendenti dell'in-

sieme microcanonico (Huang, 1997). Qui, per semplicità esplicitiamo solo la dipendenza dall'energia E . Seguendo l'idea di Boltzmann (Cercignani, 2015), nell'insieme microcanonico l'entropia $S(E)$ del sistema può essere scritta come

$$S(E) = k_B \ln(W(E)) \quad (1)$$

dove k_B è la costante di Boltzmann e $W(E)$ è il numero di microstati accessibili tra E ed $E+\Delta$, che chiamiamo densità adimensionale di stati, data da (Huang, 1997)

$$W(E) = N(E + \Delta) - N(E) \quad (2)$$

con

$$N(E) = \text{Tr}[\Theta(E - \hat{H})] \quad (3)$$

il numero di microstati disponibili fino all'energia E , essendo $\Theta(x)$ la funzione a gradino di Heaviside (che vale 0 se $x < 0$ e vale 1 se $x > 0$), Tr la traccia (somma) sullo spazio di Hilbert degli stati quantistici (Huang, 1997). Sostanzialmente $W(E)$ è una misura del numero di stati microscopici che contribuiscono a determinare l'energia complessiva macroscopica E del sistema ed anche la corrispondente entropia macroscopica $S(E)$. Le equazioni (1) e (2) sono le relazioni fondamentali della fisica statistica dell'insieme microcanonico che connettono il mondo microscopico descritto da \hat{H} e $W(E)$ con il mondo macroscopico descritto da $S(E)$. Se Δ è sufficientemente piccola si ha

$$W(E) \simeq D(E) \Delta \quad (4)$$

dove

$$D(E) = \text{Tr}[\delta(E - \hat{H})] \quad (5)$$

è la densità (dimensionata) degli stati, con $\delta(x)$ la funzione delta di Dirac (piccata su $x=0$) (Huang, 1997). Nel limite termodinamico si può scrivere

$$S(E) \simeq k_B \ln(D(E)E_s) \quad (6)$$

con E_s una scala di energia caratteristica del sistema (per esempio $E_s = \hbar^2 n^{2/3}/m$ per N particelle identiche di massa m in un volume V e densità numerica $n = N/V$). Questa scrittura è giustificata dal fatto che la quantità intensiva $\ln(\Delta/E_s)$ diventa trascurabile rispetto alla quantità estensiva $\ln(D(E)E_s)$ (Huang, 1997).

Conoscendo l'hamiltoniana \hat{H} si può calcolare $D(E)$ utilizzando l'Eq. (5). In alternativa, conoscendo l'entropia microcanonica $S(E)$, si può facilmente ricavare la densità adimensionale degli stati $W(E)$ dall'entropia $S(E)$ invertendo l'Eq. (1), ovvero

$$W(E) = e^{S(E)/k_B} . \quad (7)$$

Il terzo principio della termodinamica (Huang, 1997) afferma che $S(E_0) = 0$ se E_0 è l'energia dello stato fondamentale non degenere del sistema. Di conseguenza, dall'equazione (7) si ottiene $W(E_0) = 1$. Ricordiamo che nell'insieme microcanonico la temperatura T del sistema è una variabile dipendente che si ottiene dalla formula

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S(E)}{\partial E} \right)_{N,V} \quad (8)$$

dove il numero N di particelle ed il volume V rimangono costanti mentre si fa una variazione infinitesima dell'energia interna E (Huang, 1997).

B. Insieme statico canonico

Assumendo di lavorare nell'insieme canonico di Gibbs, dove sistema non è isolato ma è in equilibrio con un bagno termico di temperatura T (Huang, 1997), l'energia libera di Helmholtz $F(T)$ del sistema è data da (Huang, 1997)

$$F(T) = -k_B T \ln(Z(T)) , \quad (9)$$

dove $Z(T)$ è la funzione di partizione, definita come

$$Z(T) = \text{Tr}[e^{-\hat{H}/(k_B T)}] . \quad (10)$$

Le equazioni (9) e (10) sono le relazioni fondamentali della fisica statistica dell'insieme canonico. Anche in questo caso queste equazioni connettono il mondo microscopico con il mondo macroscopico descritto da \hat{H} e $Z(T)$ con il mondo macroscopico descritto da $F(T)$.

È importante sottolineare che la temperatura T , il numero N di particelle ed il volume V sono le variabili termodinamiche indipendenti dell'insieme

canonico di Gibbs (Huang, 1997). Non è difficile dimostrare che la funzione di partizione $Z(T)$ è direttamente collegata alla densità di stati $D(E)$. Infatti,

$$\text{Tr}[e^{-\hat{H}/(k_B T)}] = \text{Tr}\left[\int dE \delta(E - \hat{H}) e^{-E/(k_B T)}\right] = \int dE \text{Tr}[\delta(E - \hat{H})] e^{-E/(k_B T)} \quad (11)$$

e di conseguenza

$$Z(T) = \int dE D(E) e^{-E/(k_B T)}. \quad (12)$$

Invertendo questa formula si ottiene la densità di stati $D(E)$ come funzione della funzione di partizione $Z(T)$, e quindi anche $D(E)$ in funzione dell'energia libera di Helmholtz $F(T)$. Tuttavia, questa procedura è alquanto macchinosa perché comporta il calcolo della anti-trasformata di Laplace.

C. Metodo alternativo per determinare la densità degli stati

Proponiamo qui di seguito una procedura molto più semplice per ottenere la densità adimensionale di stati $W(E)$ dall'energia libera di Helmholtz $F(T)$.

Nell'insieme canonico, l'entropia S in funzione della temperatura T , cioè $S(T)$, è una grandezza termodinamica dipendente data da

$$S(T) = - \left(\frac{\partial F(T)}{\partial T} \right)_{N,V} \quad (13)$$

che è la derivata parziale dell'energia libera di Helmholtz $F(T)$ rispetto alla temperatura T a fissato numero N di particelle e volume V . Inoltre, l'energia interna soddisfa la relazione termodinamica

$$E(T) = F(T) + T S(T). \quad (14)$$

Sia $S(T)$ che $E(T)$ sono funzioni della temperatura assoluta T . Ciò significa che T può essere considerata come una variabile parametrica al fine di ottenere, analiticamente o numericamente, la curva parametrica S vs E , cioè $S = S(E)$, che potrebbe essere una funzione polidroma. In questo modo stiamo eseguendo, nel limite termodinamico, una trasformata di Legendre dell'entropia dall'insieme canonico, dove le grandezze termodinamiche dipendono esplicitamente dalla temperatura T , all'insieme microcanonico, dove invece le

grandezze termodinamiche dipendono esplicitamente dall'energia interna E . Avendo questo risultato, si può utilizzare l'equazione (7) per trovare la densità adimensionale di stati $W(E)$.

III. Buco nero di Schwarzschild

In questa sezione si ricava la densità adimensionale degli stati W di un buco nero di Schwarzschild (Sachdev, 2022 - Calmet, 2014) dall'entropia microcanonica S e dall'energia libera canonica di Helmholtz F . Si tratta di risultati noti, ma sicuramente non banali. Osserviamo che la derivazione della densità degli stati di un buco nero direttamente tramite una hamiltoniana quantistica \hat{H} fa parte della attuale ricerca scientifica nel settore (Calmet, 2014 - Witten, 2023). Va sottolineato che nel formalismo hamiltoniano della relatività generale bisogna scegliere un tempo e separarlo dallo spazio. Il formalismo lagrangiano è invece manifestamente covariante (Calmet, 2014 - Witten, 2023).

A. Entropia di Bekenstein-Hawking

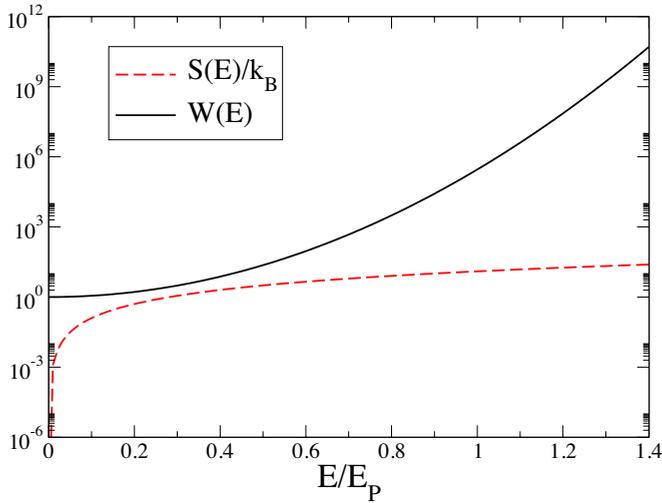
Per il buco nero di Schwarzschild di massa M , che è sferico, non ruota ed è elettricamente neutro, l'entropia di Bekenstein-Hawking (Bekenstein, 1972 - Hawking, 1975) è data da

$$S(M) = \frac{4\pi k_B}{\hbar} \frac{GM^2}{c}, \quad (15)$$

dove G è la costante gravitazionale universale, \hbar è la costante di Planck ridotta e c è la velocità della luce nel vuoto. Questa formula è stata ottenuta da Bekenstein (Bekenstein, 1972) e Hawking (Hawking, 1975) tenendo conto della radiazione termica emessa, a causa dell'energia quantistica di punto zero, nei pressi dell'orizzonte degli eventi del buco nero. Come noto, all'interno dell'orizzonte degli eventi, caratterizzato dal raggio di Schwarzschild

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}, \quad (16)$$

l'attrazione gravitazionale è così forte che nulla può allontanarsi dal buco nero, ed anzi la materia catturata tende a collassare al centro del buco nero (Calmet, 2014). Tenendo conto della Eq. (16), l'entropia (15) si può riscrivere come



1. Buco nero di Schwarzschild: la linea tratteggiata rappresenta l'entropia riscaldata $S(E)/k_B$ in funzione della energia interna riscaldata E/E_P , dove $E_P = \sqrt{\hbar c^5/G} = 1.96 \times 10^9$ Joule è l'energia di Planck. La linea continua rappresenta la densità adimensionale degli stati $W(E)$ in funzione della energia interna riscaldata E/E_P . Si noti la scala logaritmica nell'asse verticale. La figura è un adattamento di quella che compare in Ref. (Salasnich, 2023).

$$S = \frac{k_B c^3}{\hbar G} \pi r_s^2 = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{\hbar G} A_s, \quad (17)$$

dove

$$A_s = 4\pi r_s^2 \quad (18)$$

è l'area della superficie sferica dell'orizzonte degli eventi del buco nero di Schwarzschild. La lunghezza $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1.62 \times 10^{-35}$ metri è nota come lunghezza di Planck. Il fatto che l'entropia S sia direttamente proporzionale all'area A_s è una caratteristica peculiare dei buchi neri. In generale, secondo il secondo principio della termodinamica (Huang, 1997), l'entropia dell'universo non può mai diminuire. Similmente, anche l'area dell'orizzonte degli eventi di un buco nero non può mai diminuire (Calmet, 2014). La seconda uguaglianza della equazione (17) ci dice che ogni volta che aumenta l'entropia di un buco nero aumenta anche l'area del suo orizzonte degli eventi. E, chiaramente, entrambe queste quanti-

tà aumentano all'aumentare della massa contenuta nel buco nero. Come scrive Paul Sen (Sen, 2021): "l'entropia dell'universo cresce sempre, anche quando degli oggetti finiscono nei buchi neri, perché l'entropia persa dallo spazio esterno all'orizzonte degli eventi è compensata da un aumento dell'area dell'orizzonte degli eventi".

B. Buco nero nell'insieme statistico microcanonico

Assumendo che l'energia interna E del sistema sia l'energia a riposo della massa M del buco nero, cioè

$$E = Mc^2 \quad (19)$$

otteniamo immediatamente dalla Eq. (15) l'entropia microcanonica del buco nero

$$S(E) = \frac{4\pi k_B G}{\hbar c^5} E^2 \quad (20)$$

ed anche, usando l'Eq. (7), la densità adimensionale degli stati

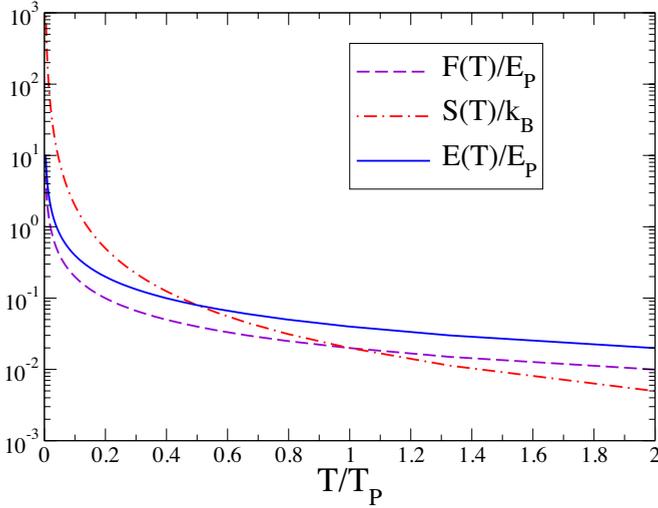
$$W(E) = e^{\frac{4\pi G}{\hbar c^5} E^2}. \quad (21)$$

Dalla Eq. (19) abbiamo che l'energia dello stato fondamentale risulta data da $E_0 = 0$ e, come previsto, dalla Eq. (21) segue $W(E_0) = W(0) = 1$. In Figura 1 sono riportate le curve dell'entropia riscalata $S(E) = k_B$ (linea tratteggiata) e della densità adimensionale degli stati $W(E)$, ottenute con le equazioni (20) e (21). L'asse verticale è in scala logaritmica per contenere l'enorme aumento di $W(E)$ al crescere dell'energia interna E .

Come precedentemente discusso, nell'insieme microcanonico la temperatura T del sistema è definita dalle Eq. (8). Per il buco nero di Schwarzschild, usando l'Eq. (20) troviamo

$$\frac{1}{T} = \frac{8\pi k_B G}{\hbar c^5} E \quad (22)$$

o, equivalentemente, usando anche l'Eq. (19) ricaviamo



2. Buco nero di Schwarzschild: grafico di tre grandezze termodinamiche, energia libera riscaldata $F(T)/E_P$, entropia riscaldata $S(T)/k_B$ ed energia interna riscaldata $E(T)/E_P$, in funzione della temperatura riscaldata T/T_P , dove $T_P = E_P/k_B = 1.41 \times 10^{34}$ Kelvin è la temperatura di Planck e $E_P = \sqrt{\hbar c^5/G} = 1.96 \times 10^9$ Joule è l'energia di Planck. Si noti la scala logaritmica nell'asse verticale. La figura è un adattamento di quella che compare in Ref. (Salasnich, 2023).

$$T = \frac{\hbar c^3}{8M\pi k_B G} \quad (23)$$

che è la cosiddetta temperatura di Hawking (Hawking, 1974).

C. Buco nero nell'insieme statistico canonico

Consideriamo ora il buco nero di Schwarzschild nell'ambito dell'insieme canonico. Poiché l'hamiltoniana quantistica \hat{H} di un buco nero è problematica, Gibbons e Hawking nel loro approccio (Gibbons, Hawking, 1977) non hanno utilizzato l'equazione (10). Hanno invece derivato la funzione di partizione canonica $Z(T)$ del buco nero di Schwarzschild dalla formula dell'integrale di cammino

$$Z(T) = \int \mathcal{D}[g_{\mu\nu}(x)] e^{-\frac{1}{\hbar} \int d^3\mathbf{x} \int_0^{\hbar/(k_B T)} d\tau \sqrt{g} \mathcal{L}(g_{\mu\nu}(x))}, \quad (24)$$

dove $g_{\mu\nu}(x)$ è il tensore metrico di curvatura dello spazio-tempo, $x = (c\tau, x)$ è la coordinata spazio-temporale locale con τ il tempo immaginario, dove g è il modulo del determinante del tensore metrico, e $L(g_{\mu\nu}(x))$ è la densità lagrangiana euclidea dell'azione di Einstein-Hilbert (Carroll, 2004 - Corry, 1997). Tenendo conto della soluzione di Schwarzschild del tensore metrico (Schwarzschild, 1916) generata da un oggetto sferico di massa M e utilizzando un'approssimazione semiclassica dell'Eq. (24) con l'inclusione di appropriati termini al contorno, Gibbons e Hawking (Gibbons, Hawking, 1977) hanno ricavato l'espressione

$$\mathcal{Z}(T) = e^{-c^5 \hbar / (16\pi G k_B^2 T^2)}. \quad (25)$$

È importante osservare che l'equazione (25) è stata ottenuta da Gibbons e Hawking utilizzando anche l'equazione (23), che è un vincolo cruciale ottenuto, nel loro approccio, imponendo la regolarità della metrica euclidea di Schwarzschild al raggio di Schwarzschild $r_s = 2GM/c^2$.

Dalle equazioni (9) e (25) otteniamo l'energia libera di Helmholtz

$$F(T) = \frac{c^5 \hbar}{16\pi G k_B T}. \quad (26)$$

Possiamo ora calcolare l'entropia $S(T)$ e l'energia interna $E(T)$ utilizzando le equazioni (13) e (14). Troviamo quindi

$$S(T) = \frac{c^5 \hbar}{16\pi G k_B T^2} \quad (27)$$

ed anche

$$E(T) = \frac{c^5 \hbar}{8\pi G k_B T}. \quad (28)$$

In Figura 2 sono riportati l'energia libera $F(T)$, l'entropia $S(T)$ e l'energia interna $E(T)$, ottenute con le equazioni (26), (27) e (28). La figura mostra il comportamento molto insolito di queste tre quantità: all'aumentare della temperatura T sono tutte monotonicamente decrescenti.

Ricordiamo che sia l'entropia canonica $S(T)$ che l'energia interna canonica $E(T)$ sono funzioni della temperatura assoluta T . La temperatura T può essere considerata come una variabile parametrica al fine di ottenere la curva parametrica S vs E . In questo caso possiamo trovare direttamente l'inversa di Eq. (28), che è esattamente Eq. (22). Inserendo questa formula in Eq. (27), cioè eseguendo analiticamente una trasformazione di Legendre, otteniamo

esattamente l'entropia microcanonica $S(E)$ dell'Eq. (20) e infine la densità adimensionale di stati $W(E)$ data, ancora una volta, dall'Eq. (21).

IV. Conclusioni

In questo breve contributo abbiamo prima discusso una semplice tecnica, basata sulla trasformata di Legendre, per ricavare la densità di stati microcanonica $W(E)$ partendo dall'energia libera di Helmholtz $F(T)$. Nel caso un buco nero di Schwarzschild, cioè un buco nero sferico non carico elettricamente e non rotante, abbiamo utilizzato questo quadro termodinamico per ricavare la $W(E)$ con due metodi alternativi: tramite l'entropia microcanonica $S(E)$ di Bekenstein e Hawking (Bekenstein, 1972 - Hawking, 1975), ed anche tramite energia libera canonica $F(T)$ di Gibbons e Hawking (Gibbons, Hawking, 1977). I risultati qui discussi non sono nuovi ma riteniamo possano essere interessanti per il lettore. Infatti essi evidenziano le stette connessioni tra due settori della Fisica apparentemente piuttosto distanti quali la termodinamica e la gravità quantistica dei buchi neri. Una stimolante analogia, nel calcolo termodinamico della densità degli stati, tra i buchi neri ed i gas di atomi fermionici fortemente interagenti è discussa dall'autore nella referenza (Salasnich, 2023).

Ringraziamenti

L'autore ringrazia Fulvio Baldovin, Davide Cassani, Giacomo Gradenigo, Pieralberto Marchetti, Fabio Sattin, Flavio Toigo, Antonio Trovato e Alexander Yakimenko per utili commenti e suggerimenti.

Bibliografia

- Bekenstein A., 1972, *Black holes and the second law*, «Lett. Nuovo Cim.», 4, pp. 99.
Calmet X. (a cura di), 2014, *Quantum Aspects of Black Holes*, Berlin, Springer.
Carroll S.M., 2004, *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*, Addison-Wesley, New York.
Cercignani C., 2015, *Ludwig Boltzmann e la meccanica statistica*, Milano, Medea.
Corry L., Renn J., Stachel J., 1997, *Belated Decision in the Hilbert-Einstein Priority Dispute*, «Science», 278, pp. 1270.
Gibbons G.W., Hawking S.W., 1977, *Action integrals and partition functions in quantum gravity*, «Phys. Rev. D», 15, pp. 2752.

- Ha Y.K., 2003, *The Gravitational Energy of a Black Hole*, «Gen. Rel. Grav.», 35, pp. 2045.
- Hawking S.W., 1974, *Black Hole Explosions?*, «Nature», 248, 5443.
- Hawking S.W., 1975, *Particle creation by black holes*, «Comm. Math. Phys.», 43, pp. 199.
- Huang K., 1997, *Meccanica Statistica*, Bologna, Zanichelli.
- Landau L.D., Lifshitz E.M., 2011, *Fisica Teorica 9. Teoria dello stato condensato. Fisica statistica*, 2, Roma, Editori Riuniti.
- Sachdev S., 2022, *Statistical Mechanics of Strange Metals and Black Holes*, «International Center for Theoretical Sciences (ICTS) News», 8 (I), pp. 1.
- Salasnich L., 2023, *Density of states for the unitary Fermi gas and the Schwarzschild black hole*, «Symmetry», 15, pp. 350.
- Schwarzschild K., 1916, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, «Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin», Phys. Math. Klasse, pp. 189.
- Sen P., 2021, *Il frigorifero di Einstein. Come la differenza tra caldo e freddo spiega l'universo*, Milano, Bollati Boringhieri.
- Witten E., 2023, *A Note On The Canonical Formalism For Gravity*, «Advances in Theoretical and Mathematical Physics», 27 (I), pp. 311.