Vittorio Penna, Luca Salasnich

# Gli stati coerenti in ottica quantistica

Abstract: We revisit both the physical and formal properties of coherent states to highlight the crucial role played by these states in achieving an effective representation of the electromagnetic quantum field theory and in its application within quantum optics.

Key words: Coherent states, Electromagnetic waves, Quantum field theory, Lie groups

Riassunto: Rivisitiamo le proprietà sia fisiche che formali degli stati coerenti per evidenziare il loro ruolo cruciale nel raggiungimento di una rappresentazione efficace della teoria quantistica del campo elettromagnetico e nella sua applicazione all'ottica quantistica.

Parole chiave: Stati coerenti, Onde elettromagnetiche, Teoria quantistica dei campi, Gruppi di Lie

In questo contributo, dopo aver esaminato le proprietà classiche e quantistiche della luce, consideriamo la cosiddetta seconda quantizzazione del campo elettromagnetico introducendo gli operatori numero e gli operatori di creazione e distruzione. Analizziamo poi gli stati di Fock della luce confrontandoli con gli stati coerenti e mettendo in evidenza alcune caratteristiche degli stati coerenti che li rendono uno strumento molto utile per connettere la teoria quantistica dei campi alla teoria classica dei campi. Si rivisitano, in parallelo, diverse proprietà generali degli stati coerenti dedicando particolare attenzione al loro carattere semiclassico ed alla loro definizione come stati

---

*Vittorio Penna*[1], *Luca Salasnich*[2]
[1] Dipartimento di Scienza Applicata e Tecnologia, Politecnico di Torino vittorio.penna@polito.it
[2] Dipartimento di Fisica e Astronomia "Galileo Galilei", Università di Padova luca.salasnich@unipd.it

di minima incertezza. Nella parte finale si evidenzia il profondo legame tra questi stati e la teoria dei gruppi di Lie.

## I. Le onde elettromagnetiche

La luce è un campo elettromagnetico caratterizzato dalla presenza di un campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ed un campo magnetico $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Nel 1965 James Clerk Maxwell trovò le equazioni complete che descrivono il campo elettromagnetico (Maxwell J.C., 1865). Qualche anno più tardi Oliver Heaviside riuscì a ridurre le equazioni di Maxwell a sole 4 equazioni (Heaviside O., 1892). Nel vuoto e in assenza di sorgenti elettriche queste equazioni sono

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 0 , \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 , \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} , \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} , \tag{4}$$

dove $\varepsilon_0$ è la costante dielettrica del vuoto e $\mu_0$ è costante di permeabilità magnetica del vuoto.

A partire da queste equazioni (1), (2), (3) e (4) è possibile dimostrare (si veda, ad esempio, (Jackson J.D., 2001)) che il campo elettrico ed il campo magnetico soddisfano le equazioni di d'Alambert delle onde

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{E} = \mathbf{0} , \tag{5}$$

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \mathbf{B} = \mathbf{0} , \tag{6}$$

dove

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} \tag{7}$$

è la velocità della luce nel vuoto. Si noti che la costante dielettrica nel vuoto $\varepsilon_0$ e la permeabilità magnetica $\mu_0$ hanno i seguenti valori: $\varepsilon_0$ = 8.85 $10^{-12}$ $C^2/(N{\cdot}m^2)$ e $\mu_0 = 4\pi{\cdot}10^{-7}$ V·s/(A m) (Jackson J.D., 2001).

Le equazioni (5) e (6), che sono pienamente confermate dagli esperimenti (i primi furono condotti da Heinrich Hertz (Hertz H., 1893)), ammettono soluzioni reali di tipo onda piana monocromatica

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \;=\; E_0\; i\left(a_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - a^*_{\mathbf{k}s}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}\;, \tag{8}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \;=\; B_0 \left(a_{\mathbf{k}s}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + a^*_{\mathbf{k}s}\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \wedge \mathbf{u}_{\mathbf{k}s}\;, \tag{9}$$

dove $i = \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria dei numeri complessi, $\mathbf{u}_{\mathbf{k}s}$ è il vettore unitario che da la direzione di polarizzazione lineare, $\mathbf{k}$ è il vettore d'onda ed $\omega$ è la frequenza angolare. In un'onda elettromagnetica monocromatica il campo elettrico ed il campo magnetico sono campi trasversi, cioè ortogonali al vettore d'onda $\mathbf{k}$, che da la direzione di propagazione dell'onda. Si noti che in generale ci sono due possibili stati di polarizzazione lineare: $s = 1, 2$, che corrispondono a due vettori unitari ortogonali $\mathbf{u}_{\mathbf{k}1}$ and $\mathbf{u}_{\mathbf{k}2}$ nel piano perpendicolare al vettore d'onda $\mathbf{k}$. I coefficienti reali $E_0$ e $B_0$ hanno le unità di misura del campo elettrico e del campo magnetico, mentre il coefficiente complesso $a_{\mathbf{k}s}$ ed il suo complesso coniugato $a^*_{\mathbf{k}s}$ sono adimensionali. Inoltre, risolvendo le equazioni di Maxwell per le onde elettromagnetiche si trova che $E_0 = cB_0$.

Sostituendo queste soluzioni di tipo onda piana monocromatica (8) e (9) nelle quazioni (5) e (6) si trova che il vettore d'onda e la frequenza angolare non sono indipendenti, ma sono legate dalla relazione di dispersione

$$\omega = c\,k\;, \tag{10}$$

dove $k = |\mathbf{k}|$ *è* il numero d'onda. Per completezza ricordiamo che la lunghezza d'onda $\lambda$ è definita come

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}\;, \tag{11}$$

e che la frequenza lineare $\nu$ e la frequenza angolare $\omega = 2\pi\nu$ sono legate alla lunghezza d'onda $\lambda$ e al numero d'onda $k$ dalle formule

$$\lambda\,\nu = \frac{\omega}{k} = c\;. \tag{12}$$

Uno dei principali risultati di Maxwell fu proprio quello di mostrare che l'elettromagnetismo e le onde elettromagnetiche, cioè la luce (visibile e non visibile), sono riconducibili ad uno stesso schema concettuale. È importante sottolineare che la quantità che appare alla destra dell'uguale nella

Eq. (4) fu introdotta da Maxwell proprio per poter derivare le equazioni di d'Alambert (5) and (6). Quindi, l'intuizione fisico-matematica di Maxwell fu cruciale per il successivo sviluppo sperimentale e tecnologico con le onde elettromagnetiche.

## II. I fotoni

Il 1900 è considerato l'anno di inizio della meccanica quantistica ed anche, specificatamente, dell'ottica quantistica. In quell'anno Max Planck (Planck M., 1900; Planck M., 1900) trovò che l'unico modo di spiegare i risultati sperimentali dello spettro elettromagnetico emesso da corpi neri consistesse nel supporre che l'energia della radiazione emessa dalle pareti del corpo nero fosse quantizzata. Pochi anni dopo la formulazione del corpo nero di Planck, Albert Einstein (Einstein A., 1905) e Satyendra Nath Bose (Bose S.N., 1924) suggerirono che le onde elettromagnetiche possono sempre essere descritte come un gas di particelle elementari di luce, chiamate fotoni. Il singolo fotone di un'onda monocromatica ha energia

$$\epsilon = h\nu = \hbar\omega \ , \tag{13}$$

dove $h = 6.63\ 10^{-34}$ J s è la costante di Planck constant e $\hbar = h/(2\pi) = 1.05\ 10^{-34}$ J s è la costante di Planck ridotta. La quantità di moto del fotone è data dalle relazioni di de Broglie

$$\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda}\mathbf{n} = \hbar\mathbf{k} \ , \tag{14}$$

dove **n** è un vettore unitario nella direzzione del vettore d'onda **k**. Chiaramente l'energia del fotone può anche essere scritta come

$$\epsilon = p\ c \ , \tag{15}$$

che è l'energia di una particella relativistica

$$\epsilon = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2} \ , \tag{16}$$

nel caso in cui la massa $m$ è nulla. Questo suggerisce che i fotoni siano quindi delle particelle intrinsecamente relativistiche: si muovono alla velocità della luce $c$ nel vuoto, hanno massa nulla $m = 0$, ma hanno energia $E$ e quantità di moto **p** diverse da zero. Quindi l'energia totale $H$ di un'onda elettromagnetica monocromatica polarizzata è data da

$$H = \hbar\omega\, n \ , \tag{17}$$

dove $n$ è il numero di fotoni che hanno frequenza $\omega$ e polarizzazione fissata $s$.

Un generico campo elettromagnetico è la sovrapposizione di molte onde elettromagnetiche monocromatiche. Indicando con $\omega_k$ la frequenza angolare di un'onda monocromatica con vettore d'onda **k**, l'energia totale $H$ del campo elettromagnetico risulta

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \hbar\omega_k\, n_{\mathbf{k}s} \ , \tag{18}$$

dove $n_{ks}$ è il numero di fotoni con vettore d'onda **k** e polarizzazione $s$.

I risultati discussi qui per il campo elettromagnetico quantizzato, ed in particolare le Eqs. (17) e (18), sono detti semiclassici perché non tengono conto delle cosiddette "fluttuazioni quantistiche del vuoto", cioè non tengono conto del seguente stupefacente risultato sperimentale: i fotoni possono apparire e scomparire dal nulla (Scully M.O. and Zubairy M.S., 1997). Inoltre, bisogna capire come collegare i risultati quantistici semiclassici (17) e (18) con l'espressione classica

$$H = \int_V d^3\mathbf{r} \left( \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{E}(\mathbf{r},t)|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}(\mathbf{r},t)|^2 \right) \tag{19}$$

dell'energia totale del campo elettromagnetico all'interno di un volume $V$. Per fare tutto ciò è necessario sviluppare un formalismo noto come seconda quantizzazione del campo elettromagnetico.

## III. La seconda quantizzazione

Nel 1927 Paul Dirac (P.A.M., 1927) introdusse la seconda quantizzazione del campo elettromagnetico. Così come in meccanica quantistica la posizione e la quantità di moto di una particella diventano operatori quantistici (P.A.M. Dirac, 1930; von Neumann J., 1932), Dirac suggerì che anche il numero di fotoni $n_{\mathbf{k}s}$ dovesse essere promosso ad operatore quantistico:

$$n_{\mathbf{k}s} \to \hat{N}_{\mathbf{k}s} \ ,$$

dove il cappuccio sopra il simbolo indica che la grandezza è un operatore quantistico. In questo modo l'energia totale classica (18) del campo elettromagnetico diventa un operatore quantistico

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s} \hbar\omega_k \, \hat{N}_{\mathbf{k}s} \ , \tag{20}$$

detto operatore Hamiltoniano del sistema.

La posizione e la quantità di moto di una particella quantistica sono operatori canonicamente coniugati che sodisfano una precisa regola di commutazione (P.A.M. Dirac, 1930; von Neumann J., 1932). Per similitudine, nel suo lavoro originale, Ref. (P.A.M., 1927), Dirac propose l'esistenza di un operatore di phase $\hat{\Theta}_{\mathrm{k},s}$ canonicamente coniugato all'operatore numero $\hat{N}_{\mathbf{k}s}$ e tale che

$$[\hat{N}_{\mathbf{k}s}, \hat{\Theta}_{\mathbf{k}',s'}] = i \, \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \, \delta_{s,s'} \ , \tag{21}$$

dove $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ è il commutatore di due generici operatori quantistici $\hat{A}$ e $\hat{B}$, mentre $\delta_{\alpha,\beta}$ è la delta di Kronecker che vale 1 se $\alpha = \beta$ e vale 0 se $\alpha \neq \beta$. Purtroppo l'operatore di phase $\hat{\Theta}_{\mathrm{k},s}$ ha dei problemi di consistenza matematica nel caso di pochi fotoni (si veda, ad esempio, (Salasnich L., 2016)).

Nello stesso articolo (P.A.M., 1927) Dirac introdusse altri due operatori quantistici, detti operatori di scala, che sono invece matematicamente ben fondati e vengono utilizzati abitualmente in ottica quantistica (Scully M.O. and Zubairy M.S., 1997; Salasnich L., 2016). Si tratta dell'operatore $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ e del suo aggiunto $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s}$. Essi sono ottenuti promuovendo ad operatori i coefficienti complessi coniugati $a_{\mathbf{k}s}$ e $a^{*}_{\mathbf{k}s}$ che appaiono nelle soluzioni (8) e (9) di tipo onda piana monocromatica del campo elettromagnetico:

$$a_{\mathbf{k}s} \to \hat{a}_{\mathbf{k}s} \ , \tag{22}$$

$$a^{*}_{\mathbf{k}s} \to \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s} \ . \tag{23}$$

Questi due operatori quantistici di scala soddisfano, per definizione, la regola di commutazione

$$[\hat{a}_{\mathbf{k}s}, \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}',s'}] = i \, \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \, \delta_{s,s'} \ . \tag{24}$$

Inoltre, sempre per definizione, l'operatore numero $\hat{N}_{\mathbf{k}s}$ è legato ai due operatori di scala dalla formula

$$\hat{N}_{\mathbf{k}s} = \hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s} \, \hat{a}_{\mathbf{k}s} \ . \tag{25}$$

Da questa definizione è possibile dimostrare che l'operatore numero soddisfa la seguente equazione agli autovalori

$$\hat{N}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k},s}|n_{\mathbf{k},s}\rangle \ , \tag{26}$$

dove l'autovalore $n_{\mathbf{k},s}$ è un numero naturale e $|n_{\mathbf{k},s}\rangle$ il corrispondente autostato, utilizzando la notazione astratta introdotta dallo stesso Dirac. Quindi, ad esempio, lo stato di 5 fotoni con vettore d'onda $\mathbf{k}$ e polarizzazione $s$ si scrive come $|5_{\mathbf{k},s}\rangle$ ed è tale che $\hat{N}_{\mathbf{k}s}|5_{\mathbf{k},s}\rangle = 5|5_{\mathbf{k},s}\rangle$, dove si è usato come autovalore il numero 5 invece del simbolo $5_{\mathbf{k},s}$ per evidenziare che l'autovalore è un numero intero, dipendente però dalle proprietà del corrispondente autostato. Da quanto detto, segue che l'operatore numero $\hat{N}_{\mathbf{k}s}$ conta il numero di fotoni nello stato quantistico a singolo modo $|\mathbf{k}s$.

Gli operatori $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ e $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s}$ vengono chiamati operatori scala perché soddisfano le seguenti fondamentali proprietà:

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}}\ |n_{\mathbf{k}s}-1\rangle \ , \tag{27}$$
$$\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s}|n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}+1}\ |n_{\mathbf{k}s}+1\rangle \ . \tag{28}$$

Quindi l'operatore di abbassamento $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ distrugge un fotone di vettore d'onda $\mathbf{k}$ e polarizzazione $s$, mentre il suo aggiunto operatore di innalzamento $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k},s}$ $(t)$ crea un fotone di vettore d'onda $\mathbf{k}$ e polarizzazione $s$. Per questo gli operatori $\hat{a}_{\mathbf{k},s}$ e $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k},s}$ vengono anche detti operatori di distruzione e creazione.

Gli operatori $\hat{a}_{\mathbf{k}s}$ e $\hat{a}^{+}_{\mathbf{k}s}$ agiscono in uno spazio di Fock $\mathcal{F}$, cioè lo spazio di Hilbert infinito dimensionale della "rappresentazione numero" introdotto nel 1932 da Vladimir Fock (Fock V., 1932). Un generico stato di questo spazio di Fock $\mathcal{F}$ è dato da

$$|n_{\mathbf{k}s}\ n'_{\mathbf{k}'s'}\ n''_{\mathbf{k}''s''}\ \dots\ \rangle = |n_{\mathbf{k}s}\rangle \otimes |n'_{\mathbf{k}'s'}\rangle \otimes |n''_{\mathbf{k}''s''}\rangle \otimes |\ \dots\ \rangle \ . \tag{29}$$

Questo stato di Fock, dove $\otimes$ indica il prodotto tensoriale, sta ad indicare che ci sono $n_{\mathbf{k}s}$ fotoni con vettore d'onda $\mathbf{k}$ e polarizzazione $s$, $n'_{\mathbf{k}'s'}$ fotoni con vettore d'onda $\mathbf{k}'$ e polarizzazione $s'$, $n''_{\mathbf{k}''s''}$ fotoni con vettore d'onda $\mathbf{k}''$ e polarizzazione $s''$, eccetera. Lo stato di vuoto dello spazio di Fock $\mathcal{F}$, che viene indicato come

$$|0\rangle = |0_{\mathbf{k}s}\ 0_{\mathbf{k}'s'}\ 0_{\mathbf{k}''s''}\ \dots\ \rangle \ , \tag{30}$$

rappresenta lo stato con zero fotoni per ogni modo $\mathbf{k}s$ del campo elettromagnetico.

## IV. L'onda piana monocromatica polarizzata

Consideriamo ora per semplicità un'onda piana monocromatica polarizzata linearmente del campo elettromagnetico. Supponiamo che la direzione della polarizzazione sia data dal vettore **u**. Tenendo conto della Eq. (8), il campo elettrico quantistico si può allora esprimere come

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t) = E_0\, i\, \left[\hat{a}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}^+\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]\, \mathbf{u} \tag{31}$$

dove $\omega = \omega_k = c|\mathbf{k}|$. Si noti che, per semplificare la notazione, si sono rimossi i pedici $\mathbf{k}s$ negli operatori di distruzione $\hat{a}$ e creazione $\hat{a}^+$. Similmente, tenendo conto della Eq. (9), il campo magnetico quantistico risulta

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t) = B_0\, \left[\hat{a}\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{a}^+\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]\, \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \wedge \mathbf{u}\ . \tag{32}$$

Inserendo queste espressioni nella equazione (19) si trova

$$\hat{H} = \hbar\omega\ \hat{a}^+\hat{a} = \hbar\omega\ \hat{N} \tag{33}$$

sotto la condizione che $E_0 = \sqrt{\hbar\omega/(2\varepsilon_0 V)}$, ricordando che $B_0 = E_0/c$, e rimuovendo una costante. Anche nell'operatore numero $\hat{N} = \hat{N}_{\mathbf{k}s}$ si sono rimossi i pedici per semplicita di notazione. L'operatore Hamiltoniano (33) è esattamente uguale all'operatore Hamiltoniano (20) se si considera proprio il caso di un'onda piana monocromatica e polarizzata. Dunque, se ci sono esattamente *n* fotoni in questa onda piana polarizzata monocromatica, lo stato di Fock del sistema risulta

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^+\right)^n |0\rangle\ . \tag{34}$$

Inoltre si trova subito dalla Eq. (33) che

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\ n\ |n\rangle\ . \tag{35}$$

Per amore di completezza ricordiamo che, con la notazione semplificata qui utilizzata, si ha $\hat{N} = \hat{a}^+\hat{a}$ ed inoltre, le equazioni (27) e (28) diventano

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}\ |n-1\rangle\ , \tag{36}$$

$$\hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\ |n+1\rangle\ . \tag{37}$$

Un sorprendente risultato dell'ottica quantistica è il seguente: usando le equazioni (36) e (37) nella espressione (31) si ottiene

$$\langle n|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)|n\rangle = \mathbf{0}, \tag{38}$$

per tutti i valori del numero $n$ di fotoni. Questo risultato vale per tutti i modi $\mathbf{k}s$, il che significa che il valore di aspettazione del campo elettrico quantistico in ogni stato di Fock è zero. Un simile risultato vale anche per il campo magnetico quantistico (32). Va ricordato che questi strani risultati sono dovuti al fatto che il valore di aspettazione (valore medio) è calcolato utilizzando lo stato di Fock $|n\rangle$, dove il numero di fotoni è fissato dato che

$$\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle \ . \tag{39}$$

In generale, il numero di fotoni del campo elettromagnetico non è però fissato. In altre parole, in generale il sistema non è in uno stato di Fock, ovverosia lo stato quantistico del sistema non è autostato dell'operatore numero.

Come è allora possibile descrivere questo stato quantistico? E come è possibile riottenere il campo elettromagnetico classico a partire dal campo elettromagnetico quantistico?

### A. *Stati coerenti come stati di minima incertezza*

Nell'ambito dell'ottica quantistica lo stato coerente $|\alpha\rangle$ fu introdotto nel 1963 da Roy Glauber (Glauber R.J., 1963) come l'autostato dell'operatore di annichilazione (o distruzione) $\hat{a}$. Ovverosia

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha\ |\alpha\rangle \ , \tag{40}$$

con la condizione di normalizzazione

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = 1 \ . \tag{41}$$

L'autovalore $\alpha$ è un numero generico complesso, la cui scelta determina univocamente la forma dello stato coerente $|\alpha\rangle$. Inoltre, dalla Eq. (40) segue anche la relazione aggiunta

$$\langle\alpha|\hat{a}^+ = \langle\alpha|\ \alpha^* \ , \tag{42}$$

dove $\alpha^*$ è il complesso coniugato di $\alpha$. La forma esplicita degli stati definiti dall'Eq. (40) viene determinata utilizzando la rappresentazione $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} f_n |n\rangle$ dello stato coerente nella base $\{|n\rangle, n \in [0, \infty]\}$ dell'operatore numero e facendo emergere dall'Eq. (40) la relazione di ricorrenza $\sqrt{n+1} f_{n+1} = \alpha f_n$ che identifica i coefficienti $f_n$ a partire da $f_0$. Si giunge quindi alla forma finale

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \ , \tag{43}$$

in cui la condizione di normalizzazione (41) permette di completare il procedimento fissando $f_0 = e^{-|\alpha|^2/2}$.

Storicamente gli stati coerenti furono studiati, sotto qualche forma, già da Erwin Schrödinger (Schrödinger E., 1926) nel 1926 e, prima o contemporaneamente a Glauber, anche da John Klauder (Klauder J.R., 1950), Julian Schwinger (Schwinger J., 1953) e Ennackal Sudarshan (Sudarshan E.C.G., 1963). Da sempre gli stati coerenti hanno trovato ampia applicazione nell'ambito della fisica (Klauder J.R., Skagerstam B.S., 1985) dimostrando di essere uno strumento estremamente utile in una varietà di settori che va dall'ottica quantistica (Scully M.O. and Zubairy M.S., 1997) e la teoria quantistica dei campi (Salasnich L., 2016) alla fisica della materia condensata e la meccanica statistica (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991).

L'equazione (40) permette di dedurre una proprietà essenziale degfli stati coerenti, già evidenziata in (Glauber R.J., 1963), che consente di definirli, in modo equivalente, come *stati coerenti di minima incertezza* (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991). Grazie alla rappresentazione degli operatori posizione e momento

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \ (\hat{a}^+ + \hat{a}) \ , \qquad \hat{p} = i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \ (\hat{a}^+ - \hat{a}) \ , \tag{44}$$

in termini di operatori di creazione $\hat{a}^+$ e distruzione $\hat{a}$ si derivano facilmente i valori medi di $\hat{x}$, $\hat{p}$, $\hat{x}^2$ e $\hat{p}^2$ corrispondenti ad un stato coerente $|\alpha\rangle$. Si trova

$$\langle \hat{x} \rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (\alpha + \alpha^*), \qquad \langle \hat{p} \rangle = i \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} (\alpha^* - \alpha), \tag{45}$$

$$\langle \hat{x}^2 \rangle = \frac{\hbar}{2m\omega} [(\alpha + \alpha^*)^2 + 1], \qquad \langle \hat{p}^2 \rangle = \frac{\hbar m\omega}{2} [1 - (\alpha^* - \alpha)^2], \tag{46}$$

dove, per un dato operatore $\hat{A}$, si definisce $\langle \hat{A} \rangle \equiv \langle \alpha | \hat{A} | \alpha \rangle$. In pochi passaggi, utilizzando la definizione di incertezza quantistica per un operatore

$$\Delta_A = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2} \tag{47}$$

si scopre che la relazione generale di Heisenberg $\Delta_x \Delta_p \geq \hbar/2$ si riduce all'eguaglianza

$$\Delta_x \Delta_p = \hbar/2 \tag{48}$$

se lo stato del sistema è descritto da uno stato coerente e quindi i valori medi sono descritti dalle espressioni (45) e (46). Gli stati coerenti definiti da (40), spesso chiamati in letteratura *stati coerenti dell'operatore di annichilazione* sono dunque, implicitamente, anche stati di minima incertezza. In questo senso rappresentano gli stati più vicini alla descrizione classica in quanto il prodotto $\Delta_x \Delta_p$ delle incertezze assume il minimo valore possibile.

B. *Alcune proprietà degli stati coerenti*

Si può facilmente mostrare che lo stato coerente $|\alpha\rangle$ non è un autostato dell'operatore numero $\hat{N}$ essendo espresso come una somma infinita (serie) di stati di Fock $|n\rangle$ con numero $n$ crescente di fotoni. Dalla Eq. (40) segue immediatamente

$$\bar{N} = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle = |\alpha|^2 \ , \tag{49}$$

ed è quindi naturale esprimere il numero complesso $\alpha$ come

$$\alpha = \sqrt{\bar{N}}\, e^{i\theta} \ , \tag{50}$$

dove $\bar{N}$ è il numero medio di fotoni nello stato coerente mentre $\theta$ è la fase dello stato coerente. Per completezza osserviamo che

$$\langle \alpha | \hat{N}^2 | \alpha \rangle = |\alpha|^2 + |\alpha|^4 = \bar{N} + \bar{N}^2 \tag{51}$$

e conseguentemente

$$\langle \alpha | \hat{N}^2 | \alpha \rangle - \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle^2 = \bar{N} \ , \tag{52}$$

mentre

$$\langle n|\hat{N}^2|n\rangle = n^2 \tag{53}$$

e dunque

$$\langle n|\hat{N}^2|n\rangle - \langle n|\hat{N}|n\rangle^2 = 0 \; . \tag{54}$$

Il valore di aspettazione del campo elettrico quantistico $\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t)$ dell'onda piana monocromatica, Eq. (31), fatto con lo stato coerente $|\alpha\rangle$ risulta essere

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r},t)|\alpha\rangle = E_0\, i\, \left[\alpha\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \alpha^*\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right] \mathbf{u} \; , \tag{55}$$

e per il campo magnetico quantistico $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t)$ si ha

$$\langle\alpha|\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r},t)|\alpha\rangle = B_0\, \left[\alpha\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \alpha^*\, e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right] \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \wedge \mathbf{u} \; , \tag{56}$$

Quindi, esattamente i risultati attesi dall'elettromagnetismo classico, si vedano le Eqs. (8) e (9). Quanto trovato ci dice che gli stati coerenti sono uno strumento molto utile per determinare la corrispondenza tra la teoria quantistica dei campi e la teoria classica dei campi.

### C. *Luce laser e stati coerenti*

Nel 1965 Fortunato Tito Arecchi (Arecchi F.T., 1965) verificò sperimentalmente che un fascio laser a singolo modo è in uno stato coerente. L'esperimento di Arecchi sul conteggio dei fotoni in un fascio laser con misure ripetute mostrò che la probabilità $p_n$ di trovare $n$ fotoni in un fascio laser durante un tempo di osservazione fissato è data dalla distribuzione poissoniana

$$p_n = e^{-\bar{N}}\, \frac{\bar{N}^n}{n!} \tag{57}$$

dove $\bar{N}$è il numero medio di fotoni. Questo risultato conferma completamente il fatto che il fascio laser sia in uno stato coerente. Infatti, l'Eq. (57) si ottiene immediatamente dalla formula

$$p_n = |\langle n|\alpha\rangle|^2 \tag{58}$$

tenendo conto della Eq. (43) e del fatto che $|\alpha|^2 = \bar{N}$.

## V. Carattere semiclassico degli stati coerenti

Il carattere semiclassico degli stati coerenti, già suggerito dalle formule (55) e (56) per i campi elettromagnetici, risulta ancora più evidente quando si utilizzano gli stati coerenti per risolvere il problema di Schrödinger associato ad un dato sistema quantistico. Ricordiamo che l'equazione di Schrödinger

$$i\hbar\partial_t|\Phi_t\rangle = \hat{H}|\Phi_t\rangle \tag{59}$$

determina l'evoluzione nel tempo degli stati fisici che descrivono il sistema e che uno dei modi per rappresentare tale evoluzione consiste nell'utilizzare la soluzione formale dell'equazione

$$|\Phi_t\rangle = U(t)|\Phi_0\rangle, \qquad U(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}. \tag{60}$$

L'operatore unitario $U(t)$, che per semplicità chiameremo propagatore, promuove con la sua azione la forma al tempo $t$ dello stato evoluto $|\Phi_t\rangle$ a partire dallo stato iniziale $|\Phi_0\rangle$. Il caso emblematico dell'oscillatore armonico permette di illustrare il carattere semiclassico degli stati coerenti considerando le proprietà della soluzione $|\Phi_t\rangle$ ottenuta assumendo uno stato coerente di Glauber come stato iniziale $|\Phi_0\rangle = |\alpha\rangle$. Poiché l'Hamiltoniana dell'oscillatore può essere espressa nella forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,\hat{x}^2 = \hbar\omega\left(\hat{N} + 1/2\right) \tag{61}$$

grazie alla tradizionale rappresentazione (44) degli operatori posizione e momento con gli operatori $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$, si scopre che il propagatore è dato semplicemente da

$$U(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar} = e^{-it\omega/2}e^{-it\omega\hat{N}}. \tag{62}$$

In tal caso, grazie alla formula (43), si trova subito

$$|\Phi_t\rangle = U(t)|\alpha\rangle = e^{-it\omega/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-it\omega n}|n\rangle = e^{-it\omega/2}|\alpha(t)\rangle\ , \tag{63}$$

con

$$\alpha(t) = \alpha e^{-it\omega}, \tag{64}$$

in cui si è resa esplicita l'azione dell'operatore numero $e^{-itw\hat{N}}|n\rangle = e^{-itwn}|n\rangle$. La formula (63) mostra come l'evoluto di un generico stato coerente iniziale $|\alpha(0)\rangle = |\alpha\rangle$ diventi nel tempo (a parte un semplice fattore di fase) uno stato $|\alpha(t)\rangle$ che mantiene la struttura originaria di stato coerente ed in cui il parametro complesso $\alpha(t)$ tempo dipendente sostituisce il parametro iniziale $\alpha(0) = \alpha$.

Questa è una delle caratteristiche più famose degli stati coerenti che consente di attribuire loro un comporatmento unico tra gli stati quantistici: la capacità di mantenere la loro struttura di stati coerenti (Mehta C.L., Chand P., Sudarshan E.C.G., and Vedam R., 1967) sotto l'azione dell'operatore di evoluzione temporale $U(t)$, cioè qualcosa che si potrebbe definire come "metacoerenza". Ma, ancora più stimolante, è l'ulteriore proprietà fondamentale che questo risultato annuncia: il carattere di coerenza come preludio all'origine gruppale degli stati coerenti. Più avanti si vedrà come la propagazione temporale potrà essere interpretata come l'azione degli elementi di un gruppo sullo stato iniziale.

Prima di considerare questa definizione alternativa di stato coerente vale la pena di mettere in luce gli aspetti semiclassici derivanti dal risultato (63) nel caso specifico dell'oscillatore armonico. Grazie alla formula (40) si trovano i valori di aspettazione che descrivono i valori medi degli operatori posizione e momento nel tempo (espressi tramite la rappresentazione (44))

$$x(t) = \langle\Phi_t|\hat{x}|\Phi_t\rangle = \langle\alpha(t)|\hat{x}|\alpha(t)\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,\left(\alpha^*(t) + \alpha(t)\right) = 2\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\,|\alpha|\cos(\omega t + \phi)\,, \tag{65}$$

$$p(t) = \langle\Phi_t|\hat{p}|\Phi_t\rangle = i\,\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,\left(\alpha^*(t) - \alpha(t)\right) = 2\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\,|\alpha|\sin(\omega t + \phi)\,, \qquad \alpha = |\alpha|e^{i\phi}\,. \tag{66}$$

Questi, riproducono perfettamente le leggi orarie che descrivono la dinamica Hamiltoniana classica dell'oscillatore armonico una volta che l'ampiezza delle oscillazioni sia identificata con

$$A = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,|\alpha|\,. \tag{67}$$

Risulta dunque confermato il carattere semiclassico degli stati coerenti i quali mostrano di aderire perfettamente al teorema di Ehrenfest e cioè alla proprietà per cui i valori di aspettazione degli operatori quantistici debbano riprodurre le leggi del moto classiche. L'origine quantistica di questi stati, comunque, non può venire elusa del tutto: il principio di Indeterminazione di Heisenberg pone un limite insormontabile al tentativo di riprodurre la descrizione classica in modo completo. Mentre le leggi orarie $x(t)$ e $p(t)$ determinano nello spazio delle fasi $\mathcal{M}$ le attese orbite ellittiche lungo le quali l'energia

$$E = \frac{p^2(t)}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\, x^2(t) = \frac{m\omega^2}{2}\, A^2 = \hbar\omega|\alpha|^2 \tag{68}$$

è costante, il carattere deterministico di queste traiettorie viene meno poiché ad ogni istante la posizione in descritta da $(x(t), p(t))$ è affetta dall'incertezza intrinseca della relazione di Heisenberg (48). Dunque si potrà al più dire che il sistema è nello stato $(x(t) \pm \Delta x, p(t) \pm \Delta p)$ e l'evoluzione del sistema corrisponderà ad un'ombra della traiettoria classica sfumata dalle incertezze $\Delta x$ e $\Delta p$. Questo esempio illustra la ben nota perdita del determinismo classico (la conoscenza esatta dello stato del sistema tramite $x(t)$ e $p(t)$) causata dal principio di Indeterminazione ma anche la proprietà degli stati coerenti di ridurre al minimo questo effetto grazie all'equazione (48).

## VI. Approccio gruppale agli stati coerenti

Una caratteristica fondamentale degli stati coerenti, evidenziata da Robert Gilmore (Gilmore R., 1972) e Askold Perelomov (Perelomov A.M., 1972; Perelomov A.M., 1986) all'inizio degli anni 70, è rappresentata dall'origine gruppale di tali stati. Questa conduce a quel che, probabilmente, costituisce il metodo, non solo più elegante da un punto di vista formale, ma anche più generale e potente per definire nuove classi di stati coerenti. Per illustrare tale proprietà e le caratteristiche principali del metodo possiamo continuare ad utilizzare gli stati coerenti descritti dalla formula (43). Si prova facilmente che questo stato può assumere la forma equivalente

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle \qquad D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} \tag{69}$$

ove $D(\alpha)$ rappresenta il cosiddetto operatore (unitario) di spostamento e lo stato $|0\rangle$ è lo stato di vuoto ($n = 0$) della base di Fock (34). Per questa ragione gli stati $|\alpha\rangle$ sono anche detti *stati coerenti dell'operatore di spostamento* (Glauber R.J., 1963; (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991). L'espressione (69) emerge dalla sequenza

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(\alpha\hat{a}^+)^n|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^+}|0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha\hat{a}^+} e^{\alpha^*\hat{a}}|0\rangle = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}|0\rangle. \tag{70}$$

La prima identità segue dalla definizione degli autostati dell'operatore numero (34) e consente di convertire la sommatoria in un operatore esponenziale. La terza identità si avvale del fatto che $e^{\alpha^* a} = \mathbb{I} + \alpha^*\hat{a} + \frac{1}{2!}(\alpha^*\hat{a})^2 + \ldots$ e che l'azione di annichilazione di $\hat{a}$ sul vuoto implica $\hat{a}|0\rangle = 0$. Infine, nell'ultimo passaggio formale si è utilizzata la celebre formula di decomposione di Baker-Campbell-Hausdorff (Gilmore R., 1981)

$$e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]/2}, \quad \hat{A} = \alpha\hat{a}^+, \hat{B} = -\alpha^*\hat{a} \quad \to \quad e^{\alpha\hat{a}^+}e^{-\alpha^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^+-\alpha^*\hat{a}}e^{|\alpha|^2/2}. \tag{71}$$

Nell'ultima equazione, il fatto che $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$ siano operatori non commutanti, cioè $[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1$, ha l'effetto di generare il fattore $e^{-|\alpha|^2/2}$, un termine extra certamente assente se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ fossero semplici numeri reali o complessi.

Il nuovo stato coerente nasce dunque dall'azione di $D(\alpha)$ sullo stato di vuoto $|0\rangle$, una definizione indipendente di stato coerente che offre subito un nuovo punto di vista. Infatti, grazie all'identità (nuovamente derivabile con la formula di Baker-Campbell-Hausdorff)

$$D(\beta)D(\alpha) = e^{i\mathbb{I}\theta(\beta,\alpha)}D(\alpha+\beta), \qquad \theta(\beta,\alpha) = \frac{1}{2i}(\beta\alpha^* - \alpha\beta^*) \tag{72}$$

si mette in luce la proprietà distintiva degli stati coerenti dell'operatore di spostamento

$$D(\beta)|\alpha\rangle = e^{i\theta}|\alpha+\beta\rangle, \tag{73}$$

per cui l'operatore $D(\beta)$ lettereralmente sposta $\alpha \in \mathbb{C}$ in $\alpha + \beta$ nel piano complesso cioè determina la traslazione di $|\alpha\rangle$ nel nuovo stato coerente $|\alpha + \beta\rangle$. Ma questa non è altro che la manifestazione dell'intrinseco carattere gruppale della (72) in cui, moltiplicando due elementi di un gruppo, gli operatori di spostamento $D(\beta)$ e $D(\alpha)$, si ottiene ancora un elemento del gruppo formato dagli elementi $e^{i\theta\mathrm{I}}$ e, ancora, un operatore di spostamento $D(\alpha + \beta)$. Nel caso corrente, il gruppo in questione è il gruppo di Weyl-Heisenberg $\mathcal{G}_{\mathcal{WH}}$ i cui elementi sono trasformazioni unitarie descritte da

$$g = e^{i\phi\mathbb{I}+i\gamma\hat{N}+\xi\hat{a}^+-\xi^*\hat{a}} \in G_{WH} \qquad (g^+ = g^{-1}) \tag{74}$$

con $\varphi, \gamma \in \mathbb{R}$ e $\xi \in \mathbb{C}$ (si noti che gli operatori di spostamento sono semplicemente elementi per cui $\varphi, \gamma = 0$). Ogni elemento $g \in \mathcal{G}_{\mathcal{WH}}$ nasce, per effetto del *mapping esponenziale*, da un elemento $\varphi\mathbb{I} + \gamma\hat{N} + i(\xi^*\hat{a} - \xi\hat{a}^+)$ della corrispondente algebra $\mathcal{A}_{\mathcal{WH}}$ (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991;

Gilmore R., 1981). Gli operatori I, $\hat{N}$, $\hat{a}$ e $\hat{a}^+$ sono i generatori dell'algebra e permettono di rappresentare qualunque elemento di $\mathcal{A}_{\mathcal{WH}}$. Evitando di entrare in dettagli formali, questa costruzione costituisce la caratteristica saliente dei gruppi di Lie, i gruppi di trasformazioni che tipicamente descrivono le simmetrie continue delle teorie e dei modelli della fisica della materia e della teoria dei campi e, quando l'Hamiltoniana $\hat{H}$ appartiene all'algebra del gruppo (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991), l'evoluzione stessa del sistema (Rasetti M.G., 1975).

Si giunge dunque ad uno dei risultati più interessanti della teoria degli stati coerenti (Gilmore R., 1972; Perelomov A.M., 1972) già suggerito della definizione (69): gli stati coerenti, non solo possono esser generati dall'azione di un operatore unitario $D(\alpha)$, ma, più in generale, possono essere generati mediante l'azione di un intero gruppo di Lie $G$ sui cosiddetti stati estremali (nel caso attuale, il vuoto $|0\rangle$). Dato dunque un gruppo di Lie $G$, si identificano il cosiddetto gruppo di isotropia $G_0$ (contenuto in $G$) ed il corrispondente vettore estremale $|\psi_0\rangle$ che diagonalizza gli elementi di $G_0$: $h|\psi_0\rangle = e^{i\lambda(h)}|\psi_0\rangle$, $\forall h \in G_0$, con $\lambda(h) \in \mathbb{R}$. In generale, le proprietà di decomposizione di un gruppo di Lie (Gilmore R., 1981) consentono di esprimere un qualunque elemento di $G$ in una forma fattorizzata $g = D \cdot h$ in cui si riconoscono un opertore di spostamento ed un elemento di $G_0$. Nel caso di $\mathcal{G}_{\mathcal{WH}}$, per esempio, si ottiene

$$g = e^{i\phi\mathbb{I} + i\gamma\hat{N} + \xi\hat{a}^+ - \xi^*\hat{a}} = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}} \cdot h, \qquad h = e^{i\eta\mathbb{I} + i\gamma\hat{N}} \tag{75}$$

da cui segue immediatamente che

$$g|\psi_0\rangle = D(\alpha)h|0\rangle = e^{i\eta}D(\alpha)|0\rangle = e^{i\eta}|\alpha\rangle, \qquad \forall g \in G_{WH} \tag{76}$$

ovvero, l'azione del gruppo riproduce, a meno di un fattore di fase, l'intera classe di stati coerenti $|\alpha\rangle$.

Questo metodo ha avuto un impatto fondamentale nello sviluppo della teoria degli stati coerenti e nelle sue applicazioni ai sistemi quantistici in quanto ha dato la possibilità di costruire nuove classi di stati coerenti in relazione a gruppi di Lie arbitrariamente complessi (Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991; Gazeau J.-P., 2009). Ciò ha consentito, per esempio, di utilizzare il formalismo degli stati coerenti nello studio di sistemi fermionici e bosonici a molti corpi (Gazeau J.-P., 2009; Klein A., Marshalek E.R., 1991 - Buonsante P. and Penna V., 2008) quando l'Hamiltoniana è rappresentata da (o è riducibile con opportune tecniche di approssimazione ad) un elemento dell'algebra $\mathcal{A}$ associata ad un dato gruppo di Lie $G$ oppure, nel caso di un approccio variazionale, quando la stato quantistico del sistema è rappresentato in termini di stati coerenti la cui scelta è dettata dall'algebra degli operatori che costituiscono l'Hamiltoniana.

## VII. Conclusioni

In questo breve lavoro abbiamo analizzato alcuni risultati significativi dell'ottica quantistica, ovverosia l'insieme delle teorie fisiche sviluppate a partire dal ventesimo secolo, che hanno determinato un salto concettuale rispetto all'elettromagnetismo classico, elaborato a partire dal dicessettesimo secolo fino al diciannovesimo secolo. Abbiamo mostrato che gli stati coerenti sono estremamente utili per mettere in relazione l'ottica quantistica con l'ottica classica, cioè per mettere in relazione il mondo quantistico microscopico dei fotoni con il mondo classico macroscopico delle onde elettromagnetiche. In effetti, gli stati coerenti rappresentano oggi uno strumento fisico-matematico essenziale per analizzare la corrispondenza tra la teoria quantistica, basata su sistemi microscopici, e la fisica classica, che rimane comunque valida per spiegare il mondo macroscopico. La fisica quantistica contemporanea, ed in particolare la teoria quantistica dei campi, trova la sua naturale rappresentazione nel formalismo degli stati coerenti non solo per spiegare la luce laser, ma più in generale per descrivere la coerenza di fase che contraddistingue fluidi quantistici fermionici e bosonici (Pitaevslkii L. and Stringari S., 2003; Amico L., Penna V., 1998 - Yukalov V.I., 2013) a bassa temperatura e caratterizza fenomeni macroscopici quali la superconduttività, la superfluidità e la condensazione di Bose-Einstein (Maccone L. e Salasnich L., 2008).

## Bibliografia

Amico L., Penna V., 1998, Phys. Rev. Lett. **80**, 2189.
Arecchi F.T., 1965, Phys. Rev. Lett. **15**, 912.
Bose S.N., 1924, Zeits. Phys. **26**, 178.
Buonsante P. and Penna V., 2008, J. Phys. A **41**, 175301.
Einstein A., 1905, Ann. der Physik **17**, 132.
Fock V., 1932, Z. Phys. **75**, 622.
Gazeau J.-P., 2009, *Coherent States in Quantum Physics,* Wiley.
Gilmore R., 1972, Ann. Phys. (NY) 74, 391.
Gilmore R., 1981, *Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications,* Wiley.
Glauber R.J., 1963, Phys. Rev. **131**, 2766

Heaviside O., 1892, *Electrical Papers*, Macmillan.

Hertz H., 1893, *Electric Waves,* Macmillan.

Jackson J.D., 2001, *Elettrodinamica classica,* Zanichelli.

Klauder J.R., Skagerstam B.S., 1985, *Coherent states, Applications in Physics and Mathematical Physics,* World Scientific, Singapore.

Klauder J.R., 1950, Ann. Phys. **11**, 123.

Klein A., Marshalek E.R., 1991, Rev. Mod. Phys. **63**, 375.

Kirrander A. and Shalashilin D.V., 2011, Phys. Rev. A **84**, 033406.

Maccone L. e Salasnich L., 2008, *Meccanica quantistica, caos e sistemi complessi* Carocci.

Massel F. and Penna V., 2006, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **39**, S143.
Maxwell J.C., 1865, Philos. Trans. R. Soc. Lond. **155**, 459

Mehta C.L., Chand P., Sudarshan E.C.G., and Vedam R., 1967, Phys. Rev. **157**, 277.

Montorsi A., Rasetti M. and Solomon A.I., 1987, Phys. Rev. Lett. **59**, 2244.

P.A.M., 1927, Proc. R. Soc. Lond. A **114**, 243.

P.A.M. Dirac, 1930, *The Principles of Quantum Mechanics,* Oxford University Press.

Perelomov A.M., 1972, Comm. Math. Phys. **26**, 222.

Perelomov A.M., 1986, *Generalized Coherent States and their Applications,* Springer-Verlag.

Planck M., 1900, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2***, 202.

Planck M., 1900, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft **2***, 237.

Pitaevslkii L. and Stringari S., 2003, *Bose-Einstein Condensation* Clarendon Press, Oxford.

Polkovnikov A., Altman E., Demler E., Halperin B., and Lukin M.D., 2005, Phys. Rev. A **71**, 063613.

Rasetti M.G., 1975, Int. J. Theor. Phys. **13**, 425.

Salasnich L., 2016, *Quantum Physics of Light and Matter,* Springer.

Schrödinger E., 1926, *Naturwissenschaften **14***, 664.

Schwinger J., 1953, Phys. Rev. **91**, 728.

Scully M.O. and Zubairy M.S., 1997, *Quantum Optics,* Cambridge University Press.

Sudarshan E.C.G., 1963, Phys. Rev. Lett. **10**, 277.

Von Neumann J., 1932, *Mahematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press.

Yukalov V.I., 2013, Laser Phys. **23**, 062001.

Zhang W.M., Feng D.H., and Gilmore R., 1991, Rev. Mod. Phys. **62**, 867.