Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

ser. X, vol. III, B
Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

CCLXXI ANNO ACCADEMICO
2021

Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

CCLXXI ANNO ACCADEMICO
2021 ser. X, vol. III, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

SCRIPTA EDIZIONI

Giovanni Garberoglio

Meccanica quantistica di oggetti macroscopici. I. Superfluidità

Abstract: *Quantum Mechanics of Macroscopic Objects. I. Superfluidity.*
Quantum Mechanics is generally considered a theory of atomic and subatomic systems. Nevertheless, some consequences can be observed also in objects so large that they can be easily seen with the naked eye. In this brief paper we discuss the history of superfluidity, a phenomenon originally observed in liquid helium and subsequently reproduced in ultracold confined gases. The leading edge of scientific research is investigating if and how similar phenomena are present in the solid state.

Key words: Quantum Mechanics; Helium; Superfluidity; Bose–Einstein condensation.

Riassunto: La Meccanica Quantistica è generalmente considerata una teoria valida solo a livello atomico e subatomico. In realtà alcune conseguenze sono direttamente apprezzabili in oggetti macroscopici, ovvero visibili ad occhio nudo. In questa comunicazione ripercorriamo la storia del fenomeno della superfluidità, originariamente osservato nel caso dell'elio liquido e successivamente riprodotto in gas confinati ultrafreddi. Lo stato dell'arte della ricerca scientifica sta investigando se e come fenomeni simili siano osservabili addirittura in solidi.

Parole chiave: Meccanica Quantistica, Elio; Superfluidità, Condensazione di Bose–Einstein.

Liquidi quantistici

Il 10 luglio 1908, nel suo laboratorio presso l'Università di Leida in Olanda, Heike Kamerlingh Onnes riuscì finalmente a realizzare un obiettivo che la comunità scientifica si era posta da diverso tempo: liquefare l'elio (nella fattispecie, l'isotopo più comune, ^{4}He [GG18]). Per fare questo, Kamerlingh Onnes dovette inventare dei metodi innovativi di raffreddamento, capaci di

Giovanni Garberoglio, European Centre for Theoretical Studies in Nuclear Physics and Related Areas, Fondazione Bruno Kessler, Trento.

raggiungere la temperatura di -269 °C, appena 4.2 gradi sopra lo zero assoluto; all'epoca la temperatura più bassa mai raggiunta su tutta la Terra.

Le difficoltà incontrate nel liquefare l'elio dipendono dalla struttura elettronica di questo atomo: i due elettroni che "ruotano" attorno al nucleo centrale sono in una configurazione energetica particolarmente stabile, la quale fa sì che l'interazione residua tra due atomi di elio sia molto, molto bassa. È quindi necessario diminuire molto la sua energia di movimento (ovvero la temperatura) affinché gli atomi passino da una condizione in cui è favorita e predominante la fase gassosa ad una in cui invece viene favorita la fase liquida.

Esiste un'altra sostanza la cui unità chimica fondamentale è composta da due elettroni: l'idrogeno molecolare (H_2). In questo caso però l'interazione residua tra due molecole è più intensa di quella tra due atomi di elio (di un fattore circa 3.5), e infatti l'idrogeno liquefà ad una temperatura "più alta", di circa 20.3 gradi sopra lo zero assoluto.

Ma c'è un altro motivo per cui la liquefazione di elio (e idrogeno) è così difficile, e che chiama in gioco le proprietà quantistiche di queste particelle [GG16]. Il principio di indeterminazione di Heisenberg ci impedisce di pensare che gli oggetti abbiano contemporaneamente una posizione ed una velocità perfettamente definite, e che le indeterminazioni su queste quantità (chiamate rispettivamente Δx e Δv) siano collegate da

$$\Delta x \, \Delta v \geq \frac{\hbar}{2\,m} ,$$

dove è la costante di Planck h divisa per 2π e m la massa della particella in questione. Nel caso di un sistema all'equilibrio termodinamico l'incertezza sulla velocità è determinata dalla temperatura T in modo tale per cui $\Delta v = \sqrt{kT/m}$ (dove k è un'altra costante fondamentale, nota come costante di Boltzmann) e quindi una particella a temperatura T si ritrova ad avere un'incertezza posizionale "quantistica" pari a

$$\Lambda = \frac{h}{\sqrt{2\,\pi\,m\,k\,T}},$$

nota come lunghezza d'onda termica di de Broglie.[1] Nel caso dell'elio (e dell'idrogeno) a bassa temperatura questa lunghezza è comparabile con le dimensioni dell'atomo (e della molecola): se da un lato abbassare la temperatura

[1] Questi semplici, ma efficaci, ragionamenti euristici non riescono sempre a dedurre gli esatti coefficienti numerici. La formula riportata per Λ è dedotta da un approccio matematicamente più rigoroso alla meccanica statistica quantistica.

favorisce il raggiungimento dello stato liquido, il fatto che l'indeterminazione posizionale aumenta lo sfavorisce. Alla fine, la riduzione della temperatura "vince" ed il sistema condensa, ma l'effetto di Λ è quello di rendere questo processo un po' più difficile. Una conferma di questo fatto la si può trovare notando come la lunghezza di de Broglie sia inversamente proporzionale alla radice quadrata della massa. Dovrebbe essere quindi più facile liquefare atomi o molecole più pesanti, a parità di interazioni interatomiche. La natura è così gentile da fornirci delle versioni a massa diversa sia dell'atomo di elio (l'isotopo ^{3}He, più leggero) sia nel caso dell'idrogeno (l'isotopologo D_2, più pesante). E in effetti, in accordo a questi ragionamenti euristici, la temperatura di liquefazione di ^{3}He (3.2 gradi assoluti) è più bassa di quella di ^{4}He, mentre la temperatura di liquefazione di D_2 (23.7 gradi assoluti) è più alta di quella di H_2.

Nonostante lo zampino della meccanica quantistica, però, l'elio liquefatto intorno ai 4 gradi assoluti si comporta ancora sostanzialmente in accordo con i vari modelli di liquidi classici, che si basano su una descrizione microscopica formata da particelle che – per tutti gli effetti pratici – possiamo immaginare come microscopiche palline indipendenti tra di loro, sebbene nel caso dell'elio liquido siano un pochino più grandi "del solito" per via dell'indeterminazione quantistica descritta dalla lunghezza d'onda di de Broglie. E, come tutti i liquidi con cui abbiamo comunemente a che fare, se mettiamo in rotazione l'elio – ad esempio come facciamo quando mescoliamo un liquido in una tazza –, questo tende spontaneamente a dissipare il movimento e tornare in uno stato di quiete (a causa dell'attrito interno, quantificato da una quantità nota come viscosità) ed è uno scarso conduttore di calore (decisamente più scarso, ad esempio, dei comuni metalli).

He-II: il superfluido

Dopo aver ottenuto (finalmente!) la liquefazione dell'elio, la curiosità degli scienziati si rivolse verso un ulteriore obiettivo, per raggiungere il quale sarebbe stato necessario sviluppare ulteriori ed ingegnose metodologie di raffreddamento: solidificarlo.

Oggi sappiamo che questo è impossibile, perlomeno lavorando con campioni di elio in laboratori tenuti alla pressione "umana" di 1 atmosfera: l'elio liquido resta liquido fino alle più basse temperature ottenibili e ci sono fondati motivi per ritenere che questo rimanga vero fino allo zero assoluto, la più bassa temperatura concepibile, alla quale ciascun sistema fisico possiede il

livello minimo dell'energia che può raggiungere (noto anche come "lo stato fondamentale"). Ulteriori investigazioni hanno mostrato che è possibile solidificare l'elio, ma per fare questo occorre comprimerlo con una pressione pari ad almeno 25 volte quella ambientale. Questa condizione non è particolarmente difficile da ottenere, e corrisponde alla pressione esercitata dall'acqua ad una profondità di 250 metri sotto il livello del mare.

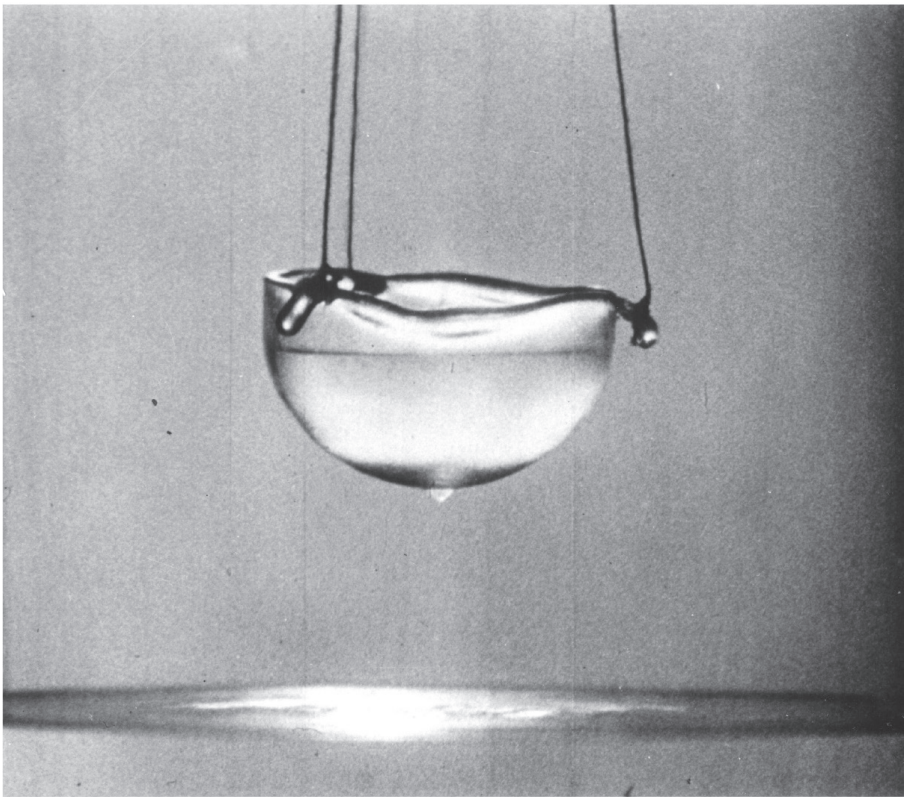
Per quanto ne sappiamo oggi l'elio è l'unica sostanza che rimane liquida a temperature corrispondenti allo zero assoluto, ma non è questa la caratteristica più strana che è stata incontrata durante i vari tentativi di solidificarlo. La natura aveva in serbo alcune sorprese per i ricercatori all'avanguardia nella criogenia.

Nel 1937 due gruppi di ricerca – uno a Oxford capitanato da John F. Allen e Don Misener, e uno a Mosca sotto la guida di Pëtr L. Kapitsa – osservarono una curiosa proprietà dell'elio raffreddato al di sotto dei 2.17 gradi assoluti, detta anche "temperatura λ" per via della forma della curva del calore specifico dell'elio nel suo intorno, che richiama quella della lettera greca. L'elio rimane liquido, ma cambia improvvisamente proprietà ed incomincia a comportarsi in una maniera decisamente peculiare, tanto che questa fase viene indicata con la dicitura He-II (elio due) per differenziarla da quella del liquido a temperatura più alta, chiamato He-I (elio uno).

Una delle caratteristiche peculiari dell'He-II è che questo liquido diventa un agile escapologo.

Potrà essere capitato di osservare la superficie dell'acqua in un bicchiere ed aver notato che quanto più ci si avvicina ai bordi, tanto più la superficie si curva. Nel caso dell'acqua in un bicchiere di vetro, la curva ha una sensibile flessione verso l'alto e questa configurazione si chiama, in gergo tecnico, menisco; le sue dimensioni sono decisamente contenute, pari a pochi millimetri. Nel caso dell'He-II, invece, il menisco tende a risalire lungo i bordi del contenitore fino a quando non raggiunge l'apertura superiore. A questo punto inizia a fluire sulla superficie esterna e cadere per gravità, fino a quando il contenitore di partenza si svuota completamente. Questa caratteristica, illustrata in Figura 1, fa sì che i contenitori per l'He-II debbano essere progettati con particolari accortezze.

Un'altra impressionante caratteristica escapologica dell'He-II si chiama in gergo *superleak* (che potremmo rendere in italiano come "superperdita"): l'elio liquido sotto i 2.17 K acquista la capacità di poter fluire agilmente attraverso pori microscopici. Questo fenomeno è evidenziato in maniera particolarmente drammatica costruendo un bicchierino che abbia come fondo un materiale nanoporoso, ovvero un filtro con pori dal diametro equivalente alle dimensioni di pochi atomi. Un materiale di questo tipo permette il passaggio



1. He-II in un contenitore di forma quasi emisferica. È ben visibile la linea orizzontale della superficie del liquido, subito sotto l'irregolare bordo superiore. La goccia nella parte esterna inferiore del contenitore è dovuta all'He-II che risale – sotto forma di pellicola sottile – lungo le pareti interne e per poi discendere lungo l'esterno e sgocciolare nel serbatoio sottostante. Lo sgocciolamento continua fino a quando il contenitore non è completamente svuotato. [Immagine prodotta da Alfred Leitner nel 1963. Pubblico dominio.]

di sostanze in fase gassosa, ma se la stessa sostanza viene liquefatta, l'attrito interno (la viscosità), fa sì che il movimento attraverso i pori sia praticamente impossibile e pertanto il materiale nanoporoso si comporta come una barriera impenetrabile.

Ebbene, si possono facilmente trovare materiali nanoporosi che, se usati come la base di un bicchierino, non permettono il passaggio dell'He-I. Se però la temperatura viene abbassata sotto la soglia di transizione all'He-II,

il liquido inizia improvvisamente a percolare attraverso la base del bicchiere, svuotandolo completamente. [AL]

È fuori dubbio che l'He-II sia un liquido decisamente *sui generis* e per questo motivo questa fase dell'elio liquido viene di solito indicata come *superfluida*. La sua scoperta valse a Kapitsa il premio Nobel per la Fisica nel 1978.

Le "super" caratteristiche dell'He-II corrispondono a quelle che ci si aspetterebbe da un fluido che, in certe condizioni, perda completamente ogni forma di attrito interno (ovvero, che esibisca viscosità nulla). In un liquido normale, come ad esempio dell'acqua in una tazza, la viscosità finita è responsabile di due processi: 1) è possibile mettere in moto il liquido inizialmente fermo ruotandolo con un cucchiaino e 2) rimuovendo il cucchiaino il liquido pian piano si ferma e torna nella condizione di quiete iniziale.

Esperimenti simili sono subito stati fatti anche per l'He-II. I risultati, specialmente quelli dovuti a Elephter L. Andronikashvili, hanno mostrato che in effetti è possibile descrivere in maniera molto precisa il comportamento dell'He-II se lo si pensa come un fluido composto da due componenti. Una componente "normale" (quindi viscosa, che si comporta esattamente come l'acqua) ed una componente "superfluida", che invece non viene influenzata dai vari tentativi di farla ruotare (a meno di non impegnarsi *un bel po*'). Subito sopra la temperatura λ la componente normale contribuisce per il 100%, mentre sotto la temperatura di transizione la componente superfluida cresce via via d'importanza, fino a costituire il 100% dell'He-II a temperature prossime allo zero assoluto.

L'accumularsi di evidenze sperimentali riguardo allo strano comportamento di He-II ha permesso di sviluppare in breve tempo una descrizione matematica estremamente efficace della dinamica di questo fluido. Basandosi su una prima intuizione di Laszlo Tisza e con la collaborazione di Isaac M. Khalatnikov, il geniale fisico sovietico Lev D. Landau riuscì a sviluppare una "teoria a due fluidi" [IK] che è ampiamente usata tutt'oggi per descrivere il comportamento dell'He-II ed è stata premiata con l'assegnazione a Landau del premio Nobel per la Fisica nel 1962.

La teoria a due fluidi per il comportamento dell'He-II è il classico esempio di una teoria fenomenologica che, partendo dall'analisi del comportamento osservato da un sistema fisico e grazie ad analogie euristiche e intuizioni brillanti, riesce a produrre una descrizione incredibilmente efficace del comportamento di un sistema fisico. Tra le intuizioni fondamentali di Landau riguardo alla dinamica dell'He-II c'è quella per cui la viscosità nulla della componente superfluida deriva dal fatto che non le è possibile disperdere energia a meno che la sua velocità non sia superiore ad un certo valore critico.

La teoria a due fluidi (o, meglio, la teoria secondo cui il fluido He-II ammette due tipi di moto simultaneamente) ha contribuito a dare una spiegazione matematicamente rigorosa e sperimentalmente verificabile di parecchi aspetti "super" del comportamento di He-II. Una delle conseguenze più incredibili è la previsione (in seguito verificata) dell'esistenza di un "secondo suono" nell'He-II, a fianco del "primo suono" che corrisponde alla propagazione delle onde acustiche nei fluidi normali. La teoria a due fluidi descrive la componente superfluida come se fosse un fluido ad entropia nulla (ovvero, senza nessun tipo di disordine interno), aspetto che ha conseguenze interessantissime per quanto riguarda la propagazione del calore.

Nei fluidi (e nei solidi) normali il calore si propaga in maniera diffusiva: se consideriamo un corpo a temperatura omogenea messo in contatto con un corpo più caldo, la termalizzazione (ovvero il processo per cui la temperatura giunge ad una configurazione stazionaria) avviene con processi simili a quelli per cui un colorante diffonde nell'acqua, ovvero in maniera molto lenta e irreversibile, corrispondente al graduale aumento di entropia del fluido in questione. La componente superfluida di He-II, però, è caratterizzata da entropia nulla, quindi può "trasportare" temperatura senza che avvengano modificazioni irreversibili del suo stato e pertanto il calore si propaga come un'onda: il "secondo suono", appunto.

Un altro fenomeno mirabilmente spiegato dalla teoria a due fluidi è la possibilità per l'He-II di avere correnti persistenti. Immaginiamo di mettere in rotazione l'He-I in un contenitore (cosa assai semplice, dal momento che si tratta di un liquido viscoso) e poi di far calare la temperatura molto al di sotto del punto λ, in modo che la componente superfluida diventi maggioritaria. La piccola e residua componente normale "si ferma" così come fa l'acqua messa in rotazione in una tazza, ma la componente superfluida non avendo attrito continua a ruotare indefinitamente (purché la velocità non sia superiore ad un certo valore critico, come evidenziato da Landau).

Esperimenti di questo tipo, però, hanno anche contribuito a mostrare le limitazioni della teoria fenomenologica. Una interessante evidenza sperimentale è stata fornita da Hess e Fairbank i quali hanno mostrato che se la rotazione iniziale di He-I è sufficientemente lenta (si parla di circa un giro al secondo per contenitori delle dimensioni del millimetro) nel passaggio alla fase superfluida l'elio liquido *si ferma* invece di continuare a ruotare come prevederebbe la teoria a due fluidi.

E quindi? Che succede *veramente* all'elio in fase superfluida?

Liquidi quantistici degeneri

Una comprensione più profonda delle proprietà dell'He-II coinvolge necessariamente un approccio *bottom-up* a partire dalle equazioni fondamentali della fisica quantistica applicate ad un sistema condensato di atomi di elio. Non è certo questa la sede adatta (né chi scrive è forse la persona più indicata) per entrare nei dettagli di una simile descrizione da principi primi, ma può essere interessante dare alcune indicazioni di massima riguardo ai fondamenti della teoria per provare ad apprezzare in che modo fenomeni di natura meramente quantistica (particolarmente evidenti nel "mondo microscopico" degli atomi e delle molecole) riescano ad avere un impatto significativo anche per oggetti "macroscopici" (non è difficile produrre un volume He-II pari a quello di un comune bicchiere).

Ma prima di affrontare l'He-II occorre fare una piccola digressione sulla meccanica quantistica di sistemi a molti corpi.

Funzioni d'onda a molti corpi.

Dovrebbe essere noto ai miei (venti)quattro affezionati lettori [GG16] che la descrizione più completa di una particella quantistica viene fornita dalla sua funzione d'onda $\psi(x)$, che è in generale una quantità *complessa* ed il cui significato è che $|\psi(x)|^2$ ((il suo modulo quadro, nel senso dei numeri complessi) rappresenta la probabilità di trovare la particella in questione nel punto x. Ma che succede se le particelle sono *tante* e *identiche?*

In questo caso la descrizione quantomeccanica si basa su una funzione d'onda che dipende dalle coordinate $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N$ delle N particelle in questione ed il modulo quadro della funzione d'onda, ovvero $|\Psi(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_N)|^2$, rappresenta la probabilità di trovare *una* particella nel punto x_1 e *una* nel punto x_2 e *una* nel punto x_3 e così via. Si noti che ho scritto "una particella nel punto x_1" e non "la particella 1 nel punto x_1", dal momento che non sappiamo quale sia la particella che osserviamo in un certo punto per via del principio di indeterminazione di Heisenberg. Se classicamente possiamo sempre seguire le traiettorie delle particelle (che sono tutte distinte) e quindi assegnare loro delle etichette, in meccanica quantistica questo non è possibile: nel momento in cui due particelle interagiscono (ovvero, le funzioni d'onda associate alle due particelle si sovrappongono) allora noi non abbiamo più la possibilità né pratica *né teorica* di dire chi è chi.

Ne consegue che la probabilità di osservare una specifica configurazione di N particelle deve essere invariante per permutazioni delle variabili (perché non possiamo sapere *quale* particella sia in una certa posizione, ma solo che

una delle particelle è in una certa posizione, *una* in un'altra posizione e così via). La funzione d'onda a molti corpi Ψ deve dunque soddisfare la condizione

$$|\Psi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_N)|^2 = |\Psi(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_N)|^2,$$

per qualsiasi coppia di indici i e j. Dal momento che la probabilità è data dal quadrato della funzione d'onda, questo significa che possono esserci due casi: o la funzione rimane la stessa quando scambiamo gli indici i e j, oppure acquista un segno negativo (perché il doppio scambio è equivalente a tornare nella condizione iniziale). In natura si trovano entrambe le possibilità. Nel caso di ^{4}He la funzione d'onda non acquista nessun segno per scambio di due coordinate, e si chiama quindi *simmetrica*. Nell'altro caso, ovvero quando una funzione d'onda acquista un segno negativo nel caso di scambio di due particelle, si dice che la funzione d'onda è *antisimmetrica*.

L'operatore statistico

La funzione d'onda di un sistema a molti corpi è un oggetto terribilmente complicato, se solo si considera che in poche gocce di elio liquido possono trovarsi $N \sim 10^{23}$ particelle (sì, si tratta di un numero enorme: 1 seguito da 23 zeri, detto anche centomila miliardi di miliardi).

E la funzione d'onda non è ancora quello che serve.

In meccanica quantistica la funzione d'onda è una descrizione completa per un sistema *isolato*: questo può essere verificato (in certe condizioni) per atomi o particelle molto lontane da qualsiasi altra particella, ma un bicchiere di He-II all'interno di un criostato collegato a pompe e tubi è ben lungi dall'essere un sistema isolato.

In questi casi la descrizione matematica del sistema deve tener conto, oltre che alla meccanica quantistica, *anche* della meccanica statistica, che assegna probabilità definite a stati diversi (ovvero, probabilità definite a funzioni d'onda diverse). In questi casi è necessario introdurre un *operatore statistico* che ha la forma

$$\varrho(X, X') = \sum_{i=0} p_i \Psi_i(X) \Psi_i^*(X'),$$

dove $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N)$ indica un insieme di coordinate, e le quantità p_i sono le probabilità dei vari stati descritti dalle funzioni d'onda Ψ_i. Nel caso di ^{4}He tutte le Ψ_i devono essere simmetriche.

Se già la funzione d'onda era un oggetto complicato, l'operatore statistico è ancora più complicato (dipende dal doppio delle coordinate necessarie per descrivere una funzione d'onda), ma la meccanica statistica quantistica ne

fornisce una formulazione esatta che dipende, oltre che dalla temperatura T, anche da informazioni microscopiche come ad esempio il potenziale di interazione fra le particelle che compongono il nostro sistema.

Condensazione di Bose–Einstein

Come si può immaginare, la risoluzione delle equazioni della meccanica statistica quantistica è un'operazione matematicamente molto complicata e praticamente impossibile da fare a mano. A meno di non riuscire a fare delle semplificazioni, seguendo il proprio intuito fisico per arrivare da un lato a una serie di equazioni risolubili e dall'altro evitare di buttare via il proverbiale bambino con l'acqua sporca.

La più drastica, ma per molti versi utile, approssimazione è quella del cosiddetto *gas ideale*, ovvero supporre che il nostro sistema sia composto da particelle puntiformi e non interagenti fra di loro. Che succede in questo caso? Il primo ad accorgersi che la proprietà di *simmetria* della funzione d'onda potesse avere conseguenze inimmaginabili dal punto di vista della fisica classica fu il fisico indiano Satyendra Nath Bose negli anni '20 del XX secolo. La sua intuizione, sviluppata e perfezionata da Albert Einstein, permise di dimostrare che a temperature sufficientemente basse, un gas ideale le cui particelle avessero funzione d'onda simmetrica (una classe di particelle chiamate, in onore di Bose, bosoni) si dovesse presentare in una fase completamente nuova: in pratica, tutte le particelle sarebbero dovute andare ad occupare la stessa funzione d'onda la quale appunto avrebbe così descritto le proprietà di un corpo *macroscopico*. Detto in termini più matematici (ma non troppo!), Bose ed Einstein dimostrarono che a temperature sufficientemente basse l'operatore statistico dipende da una sola funzione d'onda Ψ_0 (con associata probabilità $p_0 = 1$) che presenta una forma particolarmente semplice

$$\Psi_0(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N) = \psi(x_1)\psi(x_2)\ldots\psi(x_N),$$

dove $\psi(x)$ rappresenta la funzione d'onda dello stato fondamentale qualora una sola particella fosse presente nel sistema considerato. La teoria sviluppata da Bose e Einstein permetteva anche di calcolare con precisione la temperatura alla quale questa transizione ad un nuovo stato della materia (noto come condensato di Bose–Einstein o BEC, dall'acronimo della dicitura inglese *Bose–Einstein Condensate*) si sarebbe verificata

$$T_c = 3.31 \frac{\hbar^2 \rho^{2/3}}{m k},$$

dove ρ rappresenta la densità (numerica) del gas in questione e m la massa delle particelle corrispondenti. Il fatto che questa transizione abbia una natura puramente quantistica è evidenziato dal fatto che nella sua espressione compare la costante $\hbar$. Un modo interessante per leggere l'equazione che fornisce la temperatura di transizione è il seguente: la temperatura di transizione è quella per cui la lunghezza d'onda di de Broglie, Λ, diventa paragonabile con la distanza media tra le particelle, data da $\rho^{-1/3}$. Se per temperature superiori possiamo a tutti gli effetti pratici considerare le particelle come "aventi ciascuna la sua funzione d'onda"[2] e quindi in un qualche modo indipendenti e distinguibili tra loro, per temperature più basse gli effetti quantistici di indeterminazione sulla posizione rendono l'indistinguibilità quantistica dovuta alla natura bosonica (quindi con funzione d'onda totale Ψ simmetrica) una caratteristica cruciale per comprendere le proprietà del sistema fisico in esame.

E a questo punto possiamo tornare al nostro He-II. Possibile che la superfluidità possa essere legata al fenomeno della condensazione di Bose–Einstein?

Il primo a sospettarlo fu il fisico Fritz London che, subito dopo gli esperimenti di Kapitsa e di Allen e Misener, utilizzò l'equazione per T_c per calcolare quale sarebbe stata la temperatura di transizione al condensato di Bose–Einstein per l'elio alla densità ρ (nota) della fase liquida, ottenendo il valore di circa 3.2 gradi assoluti, sufficientemente vicino a quello osservato (2.17 gradi assoluti) da far avere qualche sospetto che l'He-II acquisti le sue "super" proprietà per via della condensazione di Bose–Einstein. Certo, il liquido è un sistema denso e fortemente interagente e non certo un gas ideale, ma questo non ha mai fermato nessun fisico dal cavalcare l'onda euristica. Né ha mai fermato nessun fisico dall'essere scettico: ad esempio Landau, fisico di caratura eccezionale, non riconobbe mai l'importanza della condensazione di Bose–Einstein nel determinare le proprietà dell'He-II [SB], un fatto oggi corroborato da una impressionante mole di dati sperimentali tra cui ad esempio il fatto che l'altro isotopo stabile (ma molto più raro) dell'elio, ^{3}He, particella dalla funzione d'onda *antisimmetrica*, non presenta una transizione allo stato superfluido (se non in certe condizioni molto più peculiari, ma questo è argomento per un altro giorno).

---

[2] Questa affermazione sembra in contraddizione con quanto affermato prima sul fatto che la funzione d'onda deve essere *simmetrica* ed in effetti in senso stretto lo è. Quello che succede in parecchi casi pratici è che se consideriamo solo misure di proprietà localizzate (ad esempio, la densità in un punto) in sistemi tali per cui la distanza media tra le particelle è maggiore di Λ (ovvero per temperature sufficientemente alte) allora è possibile pensare alle particelle come distinguibili e la simmetria della funzione d'onda è per molti versi irrilevante. Per un gas di bosoni al di sotto di T_c, invece, è imprescindibile includere la simmetria della funzione d'onda.

Matrice densità ridotta a un corpo

E quindi? La superfluidità dell'elio è davvero una manifestazione "macroscopica" della meccanica quantistica? Oggi si ritiene proprio di sì, anche se per arrivare a dimostrarlo c'è voluto un sacco di lavoro, sia teorico che sperimentale.

Dal punto di vista teorico un importante passo avanti è stato quello di arrivare a delineare delle condizioni generali che permettano di stabilire che effettivamente in un sistema (sia esso gassoso, liquido o solido) sia presente il fenomeno della condensazione di Bose–Einstein. Nel 1962 Chen-Ning Yang, un fisico cinese naturalizzato americano, riesce nell'impresa di collegare tutte le proposte teoriche avanzate finora a quello di un unico concetto: le proprietà della matrice densità ridotta a un corpo. [Yang]

Abbiamo visto più sopra che l'operatore statistico è una quantità incredibilmente complicata, funzione di *2N* posizioni nel caso di un sistema di *N* particelle. Nonostante sia, in linea di principio, la descrizione più completa immaginabile in meccanica quantistica per lo stato di un sistema a molti corpi, il livello di dettaglio fornito dall'operatore statistico $\varrho(X,X')$ è decisamente troppo elevato. La matrice densità ridotta a un corpo è un tentativo di riassumere alcune delle principali proprietà dell'operatore statistico: da un punto di vista matematico si ottiene "tracciando via" *2(N-1)* coordinate (e moltiplicando per *N*) ottenendo in questo modo una quantità che è funzione soltanto di 2 posizioni, e che indicheremo con $\varrho_1(X,X')$. Si può dimostrare che la conoscenza di $\varrho_1(X,X')$ permette di calcolare i valori di aspettazione di tutte quelle quantità misurabili che dipendono dalla somma delle proprietà relative ad una particella, come ad esempio la densità spaziale $\rho(x)$, che corrisponde alla sua parte "diagonale", ovvero $\rho(x) = \varrho_1(x,x')$.

Una caratteristica generale della matrice densità ridotta a 1 corpo è che può sempre essere scritta come

$$\varrho_1(x,x') = \sum_{i=0} n_i \psi_i(x) \psi_i^*(x'),$$

dove le $\psi_i(x)$ sono funzioni d'onda normalizzate a 1 (la cui forma specifica dipende dal sistema considerato) e n_i sono numeri (la cui somma è *N*, il numero totale di particelle) generalmente noti come "numeri di occupazione". Quello che Yang ha dimostrato è che in un sistema formato di bosoni identici è possibile in certe condizioni che uno degli n_i (di solito lo si indica con l'etichetta *i=0*) possa assumere un valore dell'ordine di *N*. In questo caso, che corrisponde al fatto che una frazione finita (e quindi necessariamente macroscopica) delle particelle si colloca nello stesso stato quantistico, si dice che è presente il fenomeno della condensazione di Bose–Einstein o, per motivi

storici, che il sistema è in uno stato *degenere*. La possibilità di avere occupazioni macroscopiche è legata al fatto che la funzione $\psi_0(x)$ si estende per tutto il sistema, dando origine a quello che è noto come l'ordine fuori diagonale a lunga distanza (in inglese, *off-diagonal long-range order*) che qualche anno prima Roger Penrose (premio Nobel per la Fisica nel 2002, anche se per tutt'altri motivi) aveva proposto come indicatore dell'avvenuta condensazione di Bose–Einstein in un sistema generico. [Leggett]

Nel caso di particelle con funzione d'onda antisimmetrica (note invece come fermioni, dal nome del fisico italiano Enrico Fermi), invece, Yang ha dimostrato che gli n_i sono sempre minori o uguali a 1 e pertanto la condensazione di Bose–Einstein non può avvenire.

L'approfondimento teorico delle proprietà del condensato di Bose–Einstein e del fenomeno della superfluidità ha anche messo in evidenza che non tutti i condensati sono però necessariamente superfluidi. Ad esempio nel gas *ideale* (cioè il condensato di Bose–Einstein "originale") non sarebbe possibile avere superfluidità: oltre alla condensazione è anche necessario che le energie degli stati eccitati soddisfino una particolare relazione (già evidenziata da Landau) la quale sostanzialmente dice che è necessario che il moto del fluido raggiunga una velocità *minima* affinché l'energia cinetica possa essere trasmessa a questi stati eccitati (e quindi dissipata, risultando quindi in una viscosità non nulla). Per il gas ideale quantistico, questa velocità è pari a zero, quindi il sistema non ammette moti superfluidi.

Un altro importante risultato di questi studi è stato quello di stabilire una relazione tra la velocità della componente superfluida e la variazione spaziale della fase della funzione $\psi_0(x,t)$ che descrive lo stato condensato in moto. Infatti la teoria mostra che lo stato in cui il condensato si muove si può scrivere nella forma

$$\psi_0(x,t) = e^{iS(x,t)}\psi_0(x),$$

dove $\psi_0(x)$ è la funzione d'onda del condensato a riposo. Dalla funzione d'onda del condensato in moto si ottiene la seguente espressione per la velocità della componente superfluida

$$v_s(x) = \frac{\hbar}{m}\nabla S,$$

la quale implica che per un sistema superfluido in rotazione, la velocità al bordo di un sistema di raggio R debba essere *quantizzata* secondo multipli di $\hbar/(mR)$. Questa proprietà permette di spiegare l'effetto di Hess–Fairbank descritto sopra: quando l'He-I viene raffreddato in modo da raggiungere la

fase superfluida si ferma se la sua velocità non è sufficiente a sostenere un quanto di rotazione.

Nonostante questi successi teorici, però, una comprensione profonda delle proprietà dell'elio superfluido ha richiesto un grande sforzo sia teorico che, soprattutto, computazionale. In generale, i liquidi sono sistemi difficili da trattare per via della struttura che è regolare a scala microscopica, ma disordinata a scala macroscopica: nel caso di He-II, in particolare, la funzione d'onda del condensato, $\psi_0(x)$, è una quantità che evidenzia sì la presenza di effetti quantistici macroscopici, ma non è sufficiente a descrivere in dettaglio tutte le proprietà del sistema. Ad esempio, anche quando la temperatura è così bassa che tutto il sistema si comporta come un superfluido, la percentuale di atomi nel condensato (cioè n_0, quantità che può essere misurata con esperimenti di *scattering* di neutroni) risulta essere meno del 10% del totale. Il motivo di questa apparente discrepanza è che la matrice densità a un corpo è una descrizione troppo grossolana della struttura disordinata di un liquido quantistico. Una descrizione più accurata dovrebbe come minimo coinvolgere la matrice densità a due corpi, capace di tener conto di quelle correlazioni che fanno sì che a basse temperature tutti gli atomi seguono il moto del condensato. La matrice densità a un corpo tenta di riassumere queste correlazioni a due corpi a livello di singola particella: sebbene questo approccio evidenzi l'occupazione macroscopica di un singolo stato quantico, è meno efficace nel descrivere quale sia questo stato. Come conseguenza di questa limitazione parecchie particelle vengono assegnate a stati occupati microscopicamente (cioè quelli con $i \geq 1$), ma questi sono comunque correlati fra di loro e contribuiscono tutti alla densità del moto superfluido, come un trattamento più completo riesce a evidenziare.[3]

Tanto per dare un'idea delle difficoltà incontrate nello studio di He-II, basti pensare che nonostante la teoria microscopica fosse abbastanza chiara già subito dopo la scoperta della superfluidità, è solo a partire dagli anni '90 del secolo scorso che i computer sono stati così potenti da permettere di risolvere in maniera ragionevolmente precisa le complicatissime equazioni della meccanica statistica di un liquido quantistico degenere [DMC]. Gli approcci più promettenti usano la formulazione della meccanica quantistica statistica basata sugli integrali di cammino di Richard P. Feynman, uno dei fisici più

[3] In gergo tecnico questa limitazione della matrice densità a un corpo di descrivere accuratamente lo stato di He-II (o, in generale, di superfluidi composti da particelle altamente correlate) si indica col termine di *depletion* (riduzione, diminuzione). Il numero di particelle coinvolte nel moto superfluido è generalmente maggiore di quanto la rappresentazione a un corpo riesca a indicare.

arguti del XX secolo e che ha contribuito in maniera significativa alla comprensione delle incredibili proprietà dell'elio superfluido.

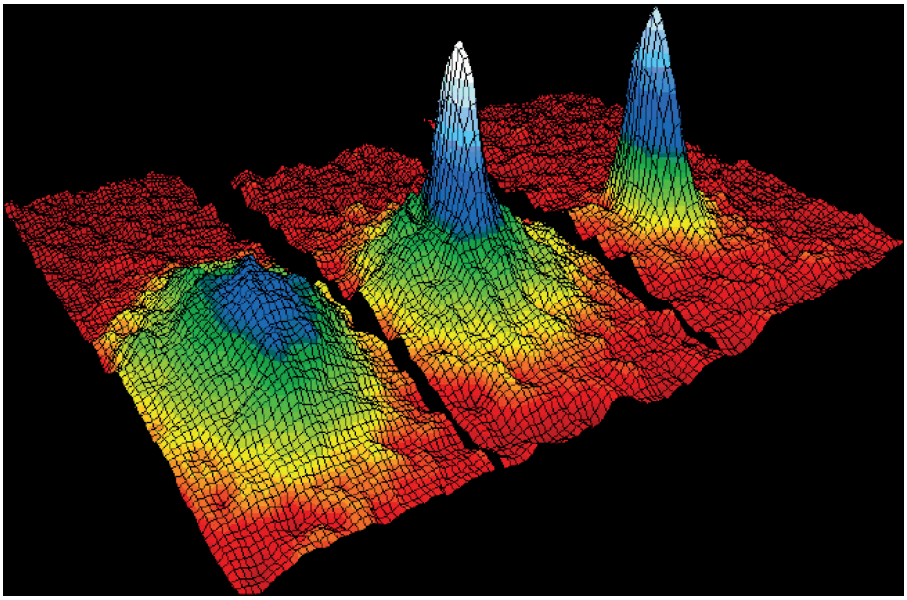
Prima che soluzioni numeriche fossero disponibili, le difficoltà interpretative e sperimentali incontrate nello studio di He-II hanno fatto sì che per molti anni i fisici si siano impegnati per ottenere sperimentalmente dei sistemi condensati e superfluidi più semplici da studiare e da trattare teoricamente che non l'elio.

Gas quantistici degeneri

Come abbiamo già visto, un gas *ideale* di bosoni non presenterebbe il fenomeno della superfluidità nonostante possa raggiungere la condizione di BEC. Sorge spontanea la domanda: cosa succederebbe nel caso di un gas *reale*? Potrebbe essere superfluido?

Il primo a rispondere, in senso affermativo, a tale questione fu il fisico sovietico Nikolai N. Bogoliubov nel 1947, mostrando come la non-idealità nella descrizione di un gas (in particolare, un gas composto da particelle dotate di reciproca interazione repulsiva) permettesse a questo, una volta condensato, di soddisfare la condizione di Landau per la superfluidità. Circa 15 anni dopo il fisico americano Eugene P. Gross e quello sovietico Lev P. Pitaevskii (della scuola di fisica teorica di Landau) riuscirono a derivare, indipendentemente, un'equazione per la funzione $\psi_0(x)$ nel caso di un gas bosonico in condizioni di BEC. Dal momento che un gas è molto più diluito e molto meno correlato che non un liquido, lo stato BEC è tale per cui $n_0 \sim N$ e l'equazione di Gross–Pitaevskii fornisce una descrizione molto precisa di parecchie delle proprietà di questo sistema (ovvero, il sistema presenta un grado di *depletion* molto basso) [PS].

Purtroppo, far condensare un gas reale si è dimostrata essere un'impresa tutt'altro che banale, dal momento che alle basse temperature richieste, lo stato stabile di qualsiasi sostanza sarebbe quello solido (o liquido, nel caso di He). I BEC in fase gassosa sono quindi necessariamente dei sistemi *metastabili* e questo rende molto difficile (ma non impossibile) crearli e studiarli. Solo nel 1995 due gruppi, quello di Eric Cornell e Carl Wieman del laboratorio JILA (nato da una collaborazione tra l'Università del Colorado a Boulder e il National Institute of Standards and Technology – NIST – degli Stati Uniti) e di Wolfgang Ketterle al MIT di Boston, riuscirono nell'impresa di portare alcuni atomi di rubidio nelle condizioni tali da osservare in maniera chiara la formazione di BEC (anche se solo per pochi secondi). La transizione da



2. La formazione di un condensato di Bose–Einstein in un sistema atomico. La figura di sinistra mostra la densità del sistema nella fase di gas "normale", a temperatura poco più alta della temperatura di transizione: questa forma, caratterizzata da una distribuzione poco densa e diffusa, è in accordo coi risultati della meccanica classica. La figura di destra la fase condensata, caratterizzata da una densità più concentrata, mentre la figura centrale (che contiene sia una distribuzione diffusa che una piccata) rappresenta il sistema che sta effettuando la transizione. La forma "piccata" è perfettamente in accordo con le previsioni dell'equazione di Gross–Pitaevskii per la fase BEC. [Figura dall'esperimento NIST/JILA/CU-Boulder. Pubblico dominio.]

uno stato di gas "normale" alla fase condensata è mostrata in Figura 2. Questi sforzi furono premiati con un premio Nobel per la fisica congiunto nel 2001.

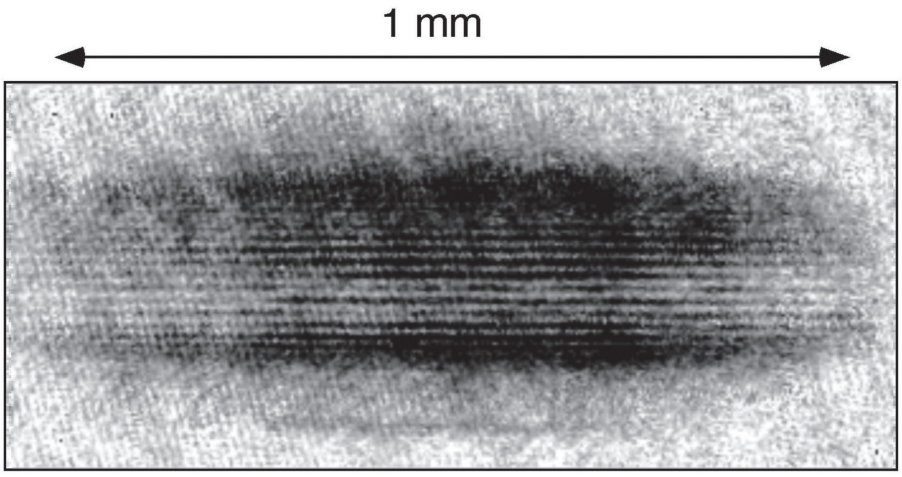
Per arrivare a questo obiettivo, è stato necessario sviluppare tecniche altamente precise di confinamento laser di un sistema di atomi. In pratica, una "nuvola" con diverse centinaia di migliaia di atomi viene fatta "galleggiare" (in una camera a vuoto) usando diversi fasci incrociati di luce laser, che possono anche essere usati per "manipolare" il condensato ed effettuare numerosi tipi di esperimenti. Il raffreddamento e intrappolamento di atomi tramite laser si è rivelata una tecnica importante e utilissima, il cui sviluppo ha valso ai suoi creatori un premio Nobel per la fisica.

La versatilità delle trappole laser ha permesso di effettuare esperimenti sul BEC in svariati tipi di condizioni, permettendo uno studio sistematico ed efficace delle proprietà fisiche di questi sistemi in condizioni altamente controllate. Questo ha permesso innanzitutto di verificare l'efficacia dell'equazione di Gross–Pitaevskii in parecchie situazioni, che erano rimaste di interesse puramente teorico per oltre 30 anni. In particolare, è stata verificata la forma aspettata per il condensato, la sua superfluidità, la struttura e la dinamica di "vortici quantistici" ottenuti mettendolo in rotazione. Oltre a questo sono state studiate le proprietà del condensato in parecchie condizioni nuove, come ad esempio sotto l'effetto di un potenziale intrappolante periodico, oppure condensando contemporaneamente delle specie diverse di atomi. [PS]

Secondo l'arbitrario parere di chi scrive, però, uno degli esperimenti più interessanti (ed impressionanti) riguarda la dimostrazione delle proprietà ondulatorie (quantistiche) del condensato a seguito di interferometria atomica. È noto come l'equazione fondamentale della meccanica quantistica, l'equazione di Schrödinger, descriva le particelle come dotate di proprietà ondulatorie, che possono interferire così come fanno le onde sulla superficie del mare formando strutture con picchi e valli. Questo è stato verificato per una notevole serie di particelle atomiche e subatomiche, nel mondo "microscopico" dove le distanze sono dell'ordine di (grossomodo) un miliardesimo di metro.

I BEC in fase gassosa, d'altro canto, hanno dimensioni di qualche millimetro e sono "macroscopici" nel senso che possono essere facilmente visti ad occhio nudo. Eppure sono descritti dall'equazione di Gross–Pitaevskii che è, per certi versi, molto simile all'equazione di Schrödinger e ammette anch'essa soluzioni ondulatorie. Quindi… che succede se ne vengono prodotti due e li si fa interagire? Se i condensati fossero solo delle palline di gas "normale" lanciate l'una verso l'altra, quello che si dovrebbe vedere è che la densità aumenta in maniera omogenea nella zona in cui si incontrano. Se fossero *realmente* onde, invece, i fenomeni di interferenza dovrebbero far apparire delle strutture con creste e valli; creste e valli che dipendono dall'interazione di onde di probabilità di natura puramente quantomeccanica. Il risultato degli esperimenti, mostrato in Figura 3, è abbastanza chiaro. I condensati per quanto macroscopici, si comportano effettivamente come le "onde di probabilità" descritte dalla meccanica quantistica.

È difficile dire se e quando lo studio della superfluidità e dei gas quantistici degeneri potrà mai portare a tecnologie che diverranno di uso comune, anche se è vero che lo sviluppo delle tecniche di intrappolamento e controllo di atomi ha portato ad un notevole sviluppo di apparati d'avanguardia nella ricerca fisica. Giusto per portare due esempi, la tecnologia delle "fontane ato-



3. Risultato di esperimenti di interferenza tra due condensati di Bose–Einstein della dimensione di circa 1 millimetro. Si notino le frange orizzontali dovute all'interferenza quantistica. [Figura tratta dalla pagine del gruppo di ricerca di Wolfgang Ketterle del MIT di Boston. https://www.rle.mit.edu/cua_pub/ketterle_group/Projects_1997/Interference/Interference_BEC.htm]

miche" ha prodotto alcuni dei più accurati misuratori di tempo, molto più precisi dello standard basato sugli orologi atomici; la cui accuratezza è già tale per cui perderebbero un secondo in trecentomila anni. Ma ai fisici ovviamente questo non basta e sono allo studio sistemi basati su atomi intrappolati che sono talmente stabili da dover richiedere di aspettare 100 milioni di anni affinché perdano un secondo.

In secondo luogo, le tecniche di intrappolamento e controllo degli atomi sono arrivate ad un livello tale di raffinatezza che possono permettere di controllare le interazioni tra singoli atomi, i quali possono a loro volta essere isolati molto bene da influenze esterne incontrollate. Diventa così possibile riuscire a manipolare a piacimento lo stato quantico di un sistema di atomi, e questa è attualmente una delle possibilità più promettenti per arrivare in futuro ad avere dei computer basati sull'uso di "bit quantistici". Il trattamento quantistico dell'informazione ha la concreta possibilità di riuscire a risolvere problemi attualmente inattaccabili dai computer "classici".

Questo non significa però che non siano già di uso comune apparecchi e attrezzature che in qualche modo usano effetti dovuti all'occupazione ma-

croscopica di un singolo stato quantico, che è la caratteristica fondamentale della condensazione di Bose–Einstein. Uno di questi apparecchi è il laser, un tipo di radiazione le cui proprietà straordinarie di collimazione e monocromaticità sono dovute al fatto che le "particelle di luce" (i fotoni, che sono anch'essi bosoni) occupano tutte lo stesso stato quantico e che hanno trovato uso comune come lettori dell'informazione registrata su CD e DVD, oltre che come misuratori di distanze o puntatori. A differenza degli atomi che compongono i BEC, però, i fotoni non possiedono massa ed il laser acquista la sua funzione proprio quando la luce non rimane intrappolata, ma viene emessa dal luogo in cui è prodotta. La "condensazione" dei fotoni nel laser non è di natura termodinamica, ma "dinamica": il numero dei fotoni in un dato stato quantico viene continuamente ripopolato attraverso il meccanismo dell'emissione stimolata (scoperto, curiosamente, proprio da Einstein).

Solidi quantistici degeneri (?)

Come abbiamo visto finora, la superfluidità e l'annesso fenomeno della condensazione di Bose–Einstein sono state osservate inizialmente nel caso di un liquido, e successivamente (e in maniera più "pura") nel caso di sistemi gassosi.

Può quindi sorgere spontanea la domanda: e i solidi? È possibile che un condensato di Bose–Einstein si presenti in forma solida? E se sì, questi sistemi avranno proprietà "super" tali da meritare l'appellativo di "supersolidi"? E in effetti i fisici se lo sono chiesti, almeno a partire dal 1969.

A prima vista potrebbe sembrare che la risposta alla questione debba essere negativa. A livello microscopico i solidi sono caratterizzati dal fatto che gli atomi – per effetto delle mutue interazioni – si dispongono in posizioni periodicamente regolari nello spazio, e questa caratteristica è responsabile di molte delle loro proprietà, tra cui la più evidente è senz'altro la rigidità. Anche assumendo che lo stato del sistema debba per qualche motivo essere descritto da una funzione d'onda simmetrica e che questa funzione d'onda descriva l'occupazione macroscopica di un singolo stato quantico (la "pistola fumante" del BEC) non è per niente chiaro che questo debba avere qualche "super" conseguenza.

I solidi *reali* però sono bel lungi dall'essere così perfettamente regolari come la teoria vorrebbe, ed in effetti mostrano irregolarità di ogni tipo come ad esempio vacanze (quando una posizione che dovrebbe essere occupata da un atomo rimane vuota), faglie e dislocazioni (quando due sottoinsiemi regolari, ma orientati diversamente, si incontrano) e così via. A differenza di quanto accade agli atomi di un reticolo perfetto e regolare, vacanze, faglie e

dislocazioni si possono "muovere" all'interno di un solido. Si pensi ad esempio ad un sito non occupato: uno degli atomi vicini si può muovere andandolo a riempire, lasciando così non-occupato il sito adiacente e così via. Per molto tempo le speculazioni teoriche si sono orientate nella direzione di legare eventuali effetti "supersolidi" al flusso "superfluido" dei difetti eventualmente presenti. [SB2]

È stato solo nel 2004 che Eunseong Kim e Moses Chan riuscirono ad evidenziare con un ingegnoso esperimento che l'elio solido messo in rotazione non rispondeva esattamente con un monoblocco, ma che una frazione di qualche percento della massa totale rimaneva come spettatore, così come accade alla frazione superfluida di He-II negli esperimenti di Andronikashvili. Da allora parecchi gruppi di ricerca si sono dati da fare in parte per verificare e confermare i risultati di Kim e Chan (confermati, anche se sono stati avanzati dubbi sulla validità dell'esperimento originale) ed in parte per studiare meglio quali caratteristiche di un campione di elio solido siano responsabili del fenomeno della supersolidità. Tra i risultati più interessanti c'è stato quello di legare in maniera abbastanza netta l'effetto supersolido alla quantità di disordine presente nel campione. È noto che nel caso dell'acciaio il trattamento di tempra (repentini e successivi innalzamenti e abbassamenti di temperatura) permette di modificare la quantità di difetti e procedure simili sono state operate sui vari campioni di elio supersolido, notando come producessero variazioni della frazione supersolida. Effetti simili sono stati visti controllando la frazione di impurezze di ^{3}He in campioni di ^{4}He solido. Nonostante un gran numero di evidenze sperimentali relative al fenomeno della supersolidità, una sua spiegazione completa e microscopica non è al momento ancora disponibile. È stato trovato recentemente il modo di creare strutture regolari e periodiche nel caso di BEC gassosi, e anche in questo caso è stato evidenziato il fenomeno della supersolidità. L'avere a disposizione un sistema le cui proprietà sono facili da manipolare e il cui comportamento è relativamente semplice da caratterizzare e studiare, sia sperimentalmente che teoricamente, ha dato nuova linfa agli studi di questo intrigante fenomeno.

Ringraziamenti

Ringrazio Alessio Recati del Centro BEC dell'INO-CNR di Trento per illuminanti discussioni relative ad alcuni degli argomenti trattati in questo articolo, e per una lettura critica della prima stesura del manoscritto. Eventuali errori od omissioni residue rimangono ovviamente di mia responsabilità.

Referenze

[GG18] Garberoglio G., 2018, Da dove viene la materia? Gli atomi e la storia dell'Universo. *Atti Acc. Rov. Agiati*, a. 268, ser. IX, vol. VIII, B: 5-24.

[GG16] Garberoglio G., 2016, La "realtà" secondo la Meccanica Quantistica: dalla funzione d'onda all'*entanglement. Atti Acc. Rov. Agiati*, a. 266, ser. IX, vol. VI, B: 5-34.

[AL] Leitner A., 1963, *Liquid Helium II, the superfluid*. Un interessantissimo video divulgativo dove vengono mostrate parecchie delle proprietà dell'He-II discusse in questo contributo. Disponibile su youtube al link https://www.youtube.com/watch?v=7U4hQ_Y9_Jk&list=PLA4EC90E292F01A87 (ultimo accesso, Marzo 2022)

[IK] Khalatnikov I.M., 2000, *An Introduction to the Theory of Superfluidity*. CRC Press.

[GCG] Ghirardi G.C., 2015, *Un'occhiata alle carte di Dio*. Il Saggiatore.

[Leggett] Leggett A.J., 2006, *Quantum Liquids. Bose condensation and Cooper pairing in condensed-matter systems.* Oxford University Press.

[SB] Balibar S., 2007, The Discovery of Superfluidity. *Journal of Low Temperature Physics* **146**, 441. *arXiv:physics/0611119*

[Yang] Yang. C.N., 1962, Concepts of Off-Diagonal Long-Range Order and the Quantum Phases of Liquid He and of Superconductors. *Review of Modern Physics* **34**, 694.

[DMC] CeperleyD.M., 1995, Path integrals in the theory of condensed helium. *Review of Modern Phys*ics **67**, 279.

[PS] Pitaevskii L., StringariS., 2016, *Bose–Einstein Condensation and Superfluidity.* Oxford University Press.

[SB2] Balibar S., 2010, The Enigma of Supersolidity. Nature **464**, 176.

ISSN 1124-0350