Francesco Prandel

L'autoconsistenza come condizione fondamentale

Abstract: A *system* is *fundamental* if it is not founded on other systems, that is, if it does not presuppose any other system. This requires that it is *irreducible* to subsystems, and *independent* of others systems. The first request is satisfied if the system is *minimal* (i.e. if it does not allow *sub-systems*), the second if the system is *self-consistent* (i.e. if it is *self-determined*). According to the general theory of systems, the minimal system consists of *two parts* between which there is a *relationship*. This system is self-consistent if each part is *determined* by its relationship with the other. Representing the parts through *functions*, and their relationship through an *operator*, the condition of self-consistency of the minimal system is expressed by an equation formally identical to the equation of Dirac in the absence of potential. This suggests interpreting this equation as a *condition of self-consistency* of the physical systems it describes.

Key words: Fundamental system, Self-consistency, Dirac equation.

Riassunto: Un *sistema* è *fondamentale* se non è a sua volta fondato su sistemi altri, cioè se non ne presuppone alcuno. Ciò richiede che sia *irriducibile* a sotto sistemi, e che sia *indipendente* da altri sistemi. La prima richiesta è soddisfatta se il sistema è *minimale* (cioè se non ammette *sotto sistemi*), la seconda se il sistema è *autoconsistente* (cioè se si *autodetermina*). Secondo la teoria generale dei sistemi, il sistema minimale è costituito da *due parti* tra le quali sussiste *una relazione*. Questo sistema è autoconsistente se ciascuna parte è *determinat*a dalla sua relazione con l'altra. Rappresentando le parti tramite *funzioni*, e la loro relazione tramite un *operatore*, la condizione di autoconsistenza del sistema minimale risulta espressa da un'equazione formalmente identica all'equazione di Dirac in assenza di potenziali. Ciò suggerisce di interpretare questa equazione come *condizione di autoconsistenza* dei sistemi fisici che descrive.

Parole chiave: Sistema fondamentale, Autoconsistenza, Equazione di Dirac.

Francesco Prandel, franz.prandel@gmail.com

Introduzione

Secondo S. Weinberg[1] "when an equativo is as succesfull as Dirac's, it is never simply a mistake. It may not be valid for the reason supposed by its author, it may break down in new contexts, and it may not even mean what its author thought in meant. We must continually be open to reinterpretations of these equations. But the great equations of modern physics are a permanent part of scientific knowledge, wich may out last even the beautiful cathedrals of earlier ages".

Il presente lavoro propone di interpretare l'equazione di Dirac[2] in assenza di potenziali come *condizione di autoconsistenza* (qui intesa nel senso di *autodeterminazione*) dei sistemi che descrive. La proposta interpretativa non prende le mosse dall'equazione di Dirac per chiarire in che senso i sistemi che descrive possano ritenersi autoconsistenti, ma procede in senso opposto: parte dalla constatazione che un sistema fondamentale è necessariamente un *sistema autoconsistente minimale*, e formalizza questa richiesta in maniera da mostrare che tale sistema è regolato da un'equazione formalmente identica a quella di Dirac in assenza di potenziali.

Secondo la teoria generale dei sistemi,[3] un *sistema* è costituito da due o più *parti* tra le quali sussistono delle *relazioni*. Questa definizione sembra *massimamente generale* in quanto pare applicabile a qualsiasi sistema conosciuto. Risulta *concettualmente economica* e dunque *poco pregiudizievole*, perlomeno in quanto ogni concetto configura in un certo senso un pregiudizio. In particolare, definisce il sistema senza per questo presupporre i concetti di *spazio* e di *tempo*. Inoltre, risulta *immediatamente operativa* perché non si limita a denotare il sistema, cioè a porlo come complemento dell'ambiente all'universo, ma lo connota specificandone gli *aspetti strutturali*. Ancora, *non presuppone osservatori* ai quali far corrispondere le possibili partizioni dell'universo che individuano un determinato sistema a fronte del suo ambiente. Infine, consente di definire un *sistema minimale* senza dover presupporre un limite inferiore alla possibilità di tali partizioni. Per queste ragioni, nel presente lavoro la adottiamo come *definizione di sistema*.

Un sistema può considerarsi *fondamentale* se non richiede a sua volta un fondamento, cioè se non presuppone sistemi altri (ma ne costituisce, semmai,

---

[1] Weinberg S., cit. in Dapor M., 2011 - *Relatività e meccanica quantistica relativistica*, Carocci, Roma.

[2] Dirac P.A.M., 1928, *The Quantum Theory of the Electron*, Proc. Roy. Soc. London A, 117:610.

[3] Von Bertalanffy L., 2004 *Teoria generale dei sistemi*, Mondadori, Milano.

il presupposto). Ne consegue che deve risultare *irriducibile* a sotto sistemi e *indipendente* da altri sistemi. La prima richiesta è soddisfatta se il sistema è *minimale*, cioè se non ammette *sottosistemi*, la seconda è soddisfatta se il sistema è *autoconsistente*, cioè se si *autodetermina*. Sulla base della definizione di sistema sopra discussa, il sistema minimale è costituito da *due* parti tra le quali sussiste *una* relazione. Tale sistema è autoconsistente se ciascuna sua parte è determinata dalla propria relazione con l'altra. Solo in questo caso, infatti, il sistema non necessita di alcuna determinazione da parte di sistemi altri, e dunque è da essi *indipendente*. L'esposizione che segue si propone di formalizzare questa richiesta, che chiameremo *condizione di autoconsistenza* del sistema minimale.

Esposizione

Indichiamo con ψ il *sistema minimale*, con x e y le sue *parti* e con $\mathcal{M}$ la loro *relazione*. Diremo che ψ è *autoconsistente* se x è determinata dalla sua relazione $\mathcal{M}$ con y, e se y è determinata dalla sua relazione $\mathcal{M}$ con x. La relazione $\mathcal{M}$ va dunque intesa come una *trasformazione reversibile*, e le parti x e y come le *forme* che $\mathcal{M}$ tras-forma l'una nell'altra.

$$\psi : \quad x \underset{\mathcal{M}}{\overset{\mathcal{M}}{\rightleftarrows}} y \tag{1}$$

Rappresentando la trasformazione $\mathcal{M}$ per mezzo di un *operatore*, e le forme x e y tramite *funzioni*, l'autoconsistenza del sistema minimale ψ è espressa dal seguente sistema di equazioni.

$$\begin{cases} \mathcal{M}x = y \\ \mathcal{M}y = x \end{cases} \tag{2}$$

Se l'operatore $\mathcal{M}$ è lineare, sommando e sottraendo membro a membro le equazioni del sistema (2) otteniamo il seguente.

$$\begin{cases} \mathcal{M}(x + y) = +(x + y) \\ \mathcal{M}(x - y) = -(x - y) \end{cases} \tag{3}$$

Le equazioni del sistema (3) sono sintetizzate dalla seguente, in cui abbiamo posto $\psi=x\pm y$ e $m=\pm1$ per mettere in evidenza le *autofunzioni* dell'operatore $\mathcal{M}$ e i relativi *autovalori*.

$$\mathcal{M}\psi = m\psi \tag{4}$$

In prima istanza identifichiamo l'operatore $\mathcal{M}$ con la matrice 2×2 diagonale nei suoi autovalori $m=\pm1$, e le sue autofunzioni ortonormali $\psi^{\pm}$ con le colonne della stessa matrice.

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \psi^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \psi^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Le autofunzioni particolari $\psi^{\pm}$ (5) non possono essere scomposte in due funzioni *distinte* x e y a valori *reali* che soddisfano il sistema (2). Generalizziamo dunque le autofunzioni $\psi^{\pm}$ (5) sostituendo l'unità reale con i numeri complessi unimodulari $exp(\pm i\theta)$, e l'operatore $\mathcal{M}$ (5) considerando che l'esponenziale complesso è autofunzione dell'operatore differenziale $id/d\theta$ con autovalori reali.

$$\mathcal{M}^{\pm} = \pm\frac{d}{id\theta}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \psi^{+} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\exp(i\theta) \qquad \psi^{-} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}\exp(-i\theta) \tag{6}$$

L'operatore $id/d\theta$ trasforma l'una nell'altra la parte reale e la parte immaginaria dell'esponenziale complesso. Ciò permette di scomporre le autofunzioni $\psi^{\pm}$ (6) nelle seguenti funzioni $x^{\pm}$ e $y^{\pm}$.

$$x^{\pm} = \frac{\mathbf{u}^{\pm}}{\sqrt{2\pi}}\cos\theta \qquad y^{\pm} = i\frac{\mathbf{u}^{\pm}}{\sqrt{2\pi}}\sin\theta \qquad \mathbf{u}^{+} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}^{-} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Le $\psi^{\pm}$ (6) risultano definite a meno di un fattore di fase $exp(\pm i\varphi)$, per cui sono autofunzioni anche dell'operatore differenziale $id/d\varphi$. Questo richiede di generalizzare ulteriormente l'operatore $\mathcal{M}$ (6). A tal fine è necessario parametrizzare le variabili angolari θ e φ, in modo da poter esprimere gli autovalori $m=\pm1$ tramite i relativi parametri. Fattorizziamo dunque la variabile θ nel parametro $E/\hbar$ e nella variabile t – dove con $\hbar$ indichiamo in questo lavoro il reciproco di 2π – e la variabile φ nel parametro $p/\hbar$ e nella variabile x (da non confondersi con la parte reale $x^\pm$ della funzione $\psi^\pm$).

Utilizzando questa notazione l'operatore $\mathcal{M}$, i suoi autovalori m e le sue autofunzioni ψ vengono espressi come segue, dove abbiamo indicato con e l'unità immaginaria *circolare* (definita dalla relazione $e^2=-1$) e con c l'unità immaginaria *iperbolica* (definita dalla relazione $c^2=1$).

$$\mathcal{M}^\pm = \pm\frac{\hbar}{e}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \pm c\frac{\partial}{\partial x}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\right\} \qquad mc^2 = \sqrt{E^2 - c^2p^2} = mc^2\sqrt{\cosh^2\omega - c^2\sinh^2\omega}$$

$$\psi^+ = \frac{\mathbf{u}^+}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(e\frac{Et \pm px}{\hbar}\right) \qquad \mathbf{u}^+ = \frac{\begin{bmatrix}mc^2 + E\\ -cp\end{bmatrix}}{\sqrt{2mc^2(mc^2+E)}} = \begin{bmatrix}\cosh(\omega/2)\\ -c\sinh(\omega/2)\end{bmatrix}$$

$$\psi^- = \frac{\mathbf{u}^-}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-e\frac{Et \pm px}{\hbar}\right) \qquad \mathbf{u}^- = \frac{\begin{bmatrix}cp\\ -mc^2 - E\end{bmatrix}}{\sqrt{2mc^2(mc^2+E)}} = \begin{bmatrix}c\sinh(\omega/2)\\ -\cosh(\omega/2)\end{bmatrix} \tag{8}$$

Il carattere *iperbolico* degli autovalori $mc^2=\pm1$ suggerisce di trattare la coppia ordinata di parametri reali (E,p) come il parametro complesso iperbolico $w=E+cp=mc^2(\cosh\omega+c\sinh\omega)$ di modulo mc^2 e fase ω, e la coppia ordinata di variabili (t,x) come la variabile complessa iperbolica $z=t+x/c=t_0(\cosh\omega+c^{-1}\sinh\omega)$ di modulo t_0 e fase ω, ed è dovuto al fatto che la seconda matrice dell'operatore $\mathcal{M}$ è a quadrato *negativo*. A sua volta queste matrice è individuata dalla richiesta che *anticommuti* con la prima, in modo da escludere le derivate parziali *miste* dall'operatore $\mathcal{M}^2$ (come richiesto dal fatto che, in base alla (4), si ha $\mathcal{M}^2\psi=m^2\psi$), e dalla richiesta che sia *antisimmetrica*, in modo che l'operatore $\mathcal{M}$ sia *hermitiano* (come richiesto dagli autovalori *reali* $mc^2=\pm1$). Nel caso particolare $\omega=0$, che si verifica se $E=\cosh\omega=1$ e $p=\sinh\omega=0$, le (8) si riducono alle seguenti

$$\mathcal{M}^{\pm} = \pm\frac{\hbar}{e}\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} \qquad mc^2 = E_0$$

$$\psi_0^{+} = \frac{\mathbf{u}_0^{+}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(e\frac{E_0 t_0}{\hbar}\right) \qquad \mathbf{u}_0^{+} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\psi_0^{+} = \frac{\mathbf{u}_0^{+}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(e\frac{E_0 t_0}{\hbar}\right) \qquad \mathbf{u}_0^{-} = \begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix} \tag{9}$$

Le funzioni fondamentali $\psi_0^{\pm}$ (9) vengono trasformate nelle loro armoniche $\psi^{\pm}$ (8) dalle seguenti rotazioni iperboliche, dove $\alpha=cp/E$ e $\beta=x/ct$.

$$\gamma^{\pm} = \mathbf{U}^{\pm}\exp\left(\pm e\frac{\alpha E\beta t \pm px}{\hbar}\right) \qquad \mathbf{U}^{\pm} = \frac{\begin{bmatrix}E+E_0 & \pm cp\\ \mp cp & E+E_0\end{bmatrix}}{\sqrt{2E_0(E+E_0)}} = \begin{bmatrix}\cosh(\omega/2) & \pm c\sinh(\omega/2)\\ \mp c\sinh(\omega/2) & \cosh(\omega/2)\end{bmatrix} \tag{10}$$

Al campo ψ risulta dunque associato il campo γ. La velocità della fase circolare del campo γ è pari a $c=\alpha E/p=x/\beta t$. Vale inoltre l'equazione $\Box\gamma=0$ (in cui $\partial^2/\partial t^2$ *è sostituito da* $\partial^2/\partial(\beta t)^2$).

La forma ψ è un *operando*, mentre la trasformazione γ *è un operatore*. Riproponiamo dunque la definizione di sistema in termini di *parti* (operandi) e di *relazioni* (operatori) dalla quale l'esposizione ha preso le mosse.

$$\psi \xleftrightarrow{\gamma} \psi \tag{11}$$

Ciascuna delle funzioni ψ che compaiono nella (11) è *fondamentale* per sé e *armonica* per l'altra.

In luogo delle (5) consideriamo ora le seguenti, anch'esse compatibili con il vincolo $m=\pm1$ posto dal sistema (3).

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \qquad \psi^{+\uparrow} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \psi^{+\downarrow} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \quad \psi^{-\uparrow} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ -1\\ 0\end{bmatrix} \quad \psi^{-\downarrow} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -1\end{bmatrix} \tag{12}$$

Generalizzando l'operatore $\mathcal{M}$ (12) come abbiamo fatto per l'operatore $\mathcal{M}$ (5) otteniamo il seguente,

$$\mathcal{M}^{\pm} = \pm\frac{\hbar}{e}\left(\boldsymbol{\gamma}_0 \frac{\partial}{\partial t} \pm c\boldsymbol{\gamma}_i \cdot \nabla\right) \tag{13}$$

dove le quattro matrici γ di Dirac sono definite dalla matrice identità $\mathbf{I}$ e dalle tre matrici σ di Pauli.

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\gamma}_i = \begin{bmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}_i \\ -\boldsymbol{\sigma}_i & 0 \end{bmatrix} \qquad i = 1,2,3 \tag{14}$$

In questo caso l'equazione (4) è formalmente identica a quella di Dirac in assenza di potenziali.

Conclusione

L'equazione (4) formalizza la richiesta di autoconsistenza del sistema minimale ψ (1). Sembra dunque possibile interpretare l'equazione di Dirac in assenza di potenziali come condizione *di autoconsistenza* dei sistemi fisici liberi che descrive.

Il campo ψ, proprio in quanto costituito da due *parti* x=Reψ e y=Imψ ognuna delle quali è determinata dalla sua *relazione* $\mathcal{M}$ con l'altra, risulta sia *irriducibile* che *autoconsistente*. Lo proponiamo dunque come *modello di sistema fisico fondamentale*. Secondo questo modello, un sistema fisico *elementare* non sarebbe tale in quanto privo di struttura, ma in quanto *struttura irriducibile*. Infatti, la richiesta di *autoconsistenza* – qui intesa come *autodeterminazione dell'intero dovuta alla reciproca determinazione delle parti* – non consente di considerare *separatamente* le sue parti Reψ e Imψ come parti *determinate*. In tal senso sembra possibile intendere l'autoconsistenza come condizione fondamentale.