Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

ser. X, vol. III, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

CCLXXI ANNO ACCADEMICO
2021

Atti

DELLA ACCADEMIA ROVERETANA DEGLI AGIATI

CCLXXI ANNO ACCADEMICO
2021 ser. X, vol. III, B

Classe di Scienze matematiche, fisiche e naturali

SCRIPTA EDIZIONI

Achille C. Varzi

I punti come costrutti di ordine superiore: il metodo dell'astrazione estensiva di Whitehead

['Points as Higher-order Constructs: Whitehead's Method of Extensive Abstraction', pubblicato in *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives*, a cura di Stewart Shapiro e Geoffrey Hellman, Oxford University Press, 2021, pp. 347–378]

Traduzione di Federico Dapor

Abstract: Euclid's definition of a point as "that which has no part" has been a major source of controversy in relation to the epistemological and ontological presuppositions of classical geometry, from the medieval and modern disputes on indivisibilism to the full development of point-free geometries in the 20th century. Such theories stem from the general idea that all talk of points as putative lower-dimensional entities must and can be recovered in terms of suitable higher-order constructs involving only extended regions (or bodies). Here I focus on what is arguably the first thorough proposal of this sort, Whitehead's theory of "extensive abstraction", offering a critical reconstruction of the theory through its successive installments: from the purely mereological version of 'La théorie relationniste de l'espace' (1916) to the refined versions presented in *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919) and in *The Concept of Nature* (1920) to the last, mereotopological version of *Process and Reality* (1929).

Key words: Geometry, Mereology, Topology, Point, Region, Whitehead.

Riassunto: La definizione euclidea di punto come "ciò che non ha parti" è stata una delle principali fonti di controversie in relazione ai presupposti epistemologici e ontologici della geometria classica, dalle dispute medievali e moderne sull'indivisibilità al pieno sviluppo delle geometrie senza punti del XX secolo. Tali teorie derivano dall'idea generale che qualunque discorso che verte sui punti come presunte entità di dimensioni inferiori debba e possa venire reinterpretato in termini di opportuni costrutti di ordine superiore che chiamano in causa soltanto regioni (o corpi) estesi. Il presente lavoro si concentra su quella che può a buon diritto considerarsi la prima proposta completa di questo tipo, la teoria dell'"astrazione estensiva" di Whitehead, offrendo una ricostruzione critica delle sue successive formulazioni: dalla versione puramente mereologica di "La théorie relationniste de l'Espace" (1916) alle revisioni presentate in *An Inquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919) e in *The Concept of Nature* (1920) all'ultima formulazione, di carattere mereotopologico, in *Process and Reality* (1929).

Parole chiave: Geometria, Mereologia, Topologia, Punto, Regione, Whitehead.

Achille C. Varzi, Columbia University, New York

Introduzione

L'idea che il continuo sia un sistema connesso di regioni anziché di punti inestesi ha una storia lunga e ricca di ramificazioni filosofiche, matematiche e scientifiche. Se è vero che la geometria di Euclide è l'esempio più evidente di una teoria antica che è sopravvissuta virtualmente intatta sino ai giorni nostri (e gli *Elementi* il testo di maggior successo di tutti i tempi[1]), i suoi fondamenti assiomatici e concettuali non sono rimasti indiscussi; e se gli studi sulle teorie assiomatiche alternative si sono focalizzati sull'ultimo postulato di Euclide, la cui riformulazione o il cui rifiuto hanno portato nel XIX secolo allo sviluppo di varie geometrie ellittiche, iperboliche e assolute, la definizione originale di punto come ciò che "non ha parti" (o, in altre versioni, "non ha parti e nessuna delle dimensioni" o "ha una posizione ma non una grandezza"[2]) è stata invece la prima fonte di discussione per ciò che concerne i presupposti ontologici ed epistemologici della teoria euclidea, dal dibattito medievale e moderno sull'indivisibilità fino alle geometrie senza-punti che si sono pienamente sviluppate nel secolo XX.

Come ha notato Giangiacomo Gerla nel capitolo dedicato a queste ultime,[3] una geometria senza-punti non mira a fornire un'alternativa a quella euclidea. Piuttosto, l'obiettivo è una nuova fondazione della geometria *tout court*, euclidea o no, in cui tutte le nozioni basilari siano opportunamente ridefinite nei termini di regioni estese. Lo stesso concetto di punto è soggetto a questo trattamento. I modelli previsti dalla teoria non lasciano spazio a punti intesi come entità *bona fide* di dimensione inferiore, ma i punti vengono comunque recuperati come costrutti di ordine superiore. In effetti proprio questo è il compito principale di una teoria siffatta; tutte le altre nozioni sono ridefinite di conseguenza. È per tale ragione che si escludono dal novero delle geometrie senza-punti teorie come la geometria continua di von Neumann (1960).[4] Una geometria senza-punti non è una geometria in cui i punti sono del tutto assenti; è piuttosto una teoria in cui i punti sono trattati come artefatti ontologici derivati.

Esistono oggi numerosi metodi per perseguire questo obiettivo. Qui ci focalizzeremo su quella che può a buon diritto ritenersi la prima proposta

---

[1] È stato stimato che il numero di edizioni degli *Elementi*, a partire dalla prima stampa del 1482, sia secondo solo a quelle della *Bibbia* (Boyer 1968, p. 131).

[2] La prima variante viene da Simplicio (Heath 1908, vol. 1, p. 157); la seconda da Playfair (1795, pp. 1 e 347–348).

[3] Gerla (2021), incluso nel volume da cui è tratto il presente saggio.

[4] Le geometrie sviluppate nell'ambito della teoria delle categorie sono solitamente escluse per i medesimi motivi; si veda la sezione 4.2 di Gerla (2021).

completa, che risale ai lavori di Alfred Whitehead sulla geometria come scienza fisica.[5] Le motivazioni specifiche che l'hanno ispirata non sono necessariamente condivise dalle teorie successive, e il metodo stesso ha una storia intricata. Tra le altre cose, sappiamo da Russell (1914, p. vi) che avrebbe dovuto essere incluso nel quarto volume previsto per i *Principia Mathematica*, la cui stesura sarebbe stata interamente a carico di Whitehead (Russel, 1948b, p. 138). Tale progetto non ha mai visto la luce.[6] Ciò nonostante, il metodo venne portato a compimento e si è dimostrato di enorme influenza.[7]

Motivazioni filosofiche

Originariamente Whitehead presentò il suo metodo in un testo presentato al *Congrès International de Philosophie Mathématique* di Parigi l'8 aprile del 1914, pubblicato due anni più tardi in traduzione francese con il titolo 'La théorie relationniste de l'espace' (1916, citato d'ora innanzi come *TRE*).[8] Il metodo fu

---

[5] Storicamente la prima proposta potrebbe essere rintracciata in Lobačevskij (1835–1938), la cui geometria non-euclidea è promossa, nelle pagine introduttive, come senza punti: "Superfici, linee e punti, come sono definiti in geometria, esistono solamente nella nostra immaginazione. […] Noi ci legheremo solo a idee che nella nostra mente si uniscono in maniera diretta alla concezione dei corpi alla quale la nostra immaginazione è abituata" (pp. 21-22). Tuttavia questa concezione è solamente abbozzata, e i dettagli della teoria di Lobačevskij alla fine continuano a trattare la nozione di "punto" come primitiva. La prima teoria rigorosa basata su un primitivo differente sarebbe arrivata solo con Huntington (1913), che utilizza "corpo solido", ma questa teoria definisce semplicemente i punti come corpi minimi, ovvero come sfere che non contengono al loro interno altre sfere, dunque, ancora, non è senza punti ma perfettamente in linea con Euclide. È degno di nota, comunque, che l'articolo di Huntington si basa su una conferenza del 1912 alla quale Whitehead aveva partecipato (Hobson and Love 1913, vol. 1, p. 54).

[6] Poco si conosce rispetto alla pianificazione dei contenuti del volume, ma l'indice preliminare incluso da Russell e da Whitehead nella domanda di finanziamento alla Royal Society (trascritto in Grattan-Guinness 1975, pp. 98–100) dice che sarebbe dovuto essere suddiviso in quattro parti: (A) Geometria proiettiva, (B) Geometria descrittiva, (C) Geometria metrica, e (D) Costruzione dello spazio. Per un quadro più dettagliato si veda Harrell (1988).

[7] La letteratura critica è molto estesa. I testi principali, verso i quali sono debitore, includono Stebbing (1930, cap. 23), Lawrence (1950; 1956, cap. 6), Lowe (1950; 1962, cap. 3), Mays (1952; 1959, cap. 7), Palter (1960, capp. 5–6), Vuillemin (1971, cap. 3), Hurley (1979, parte III), Fitzgerald (1979, cap. 4), Kraus (1979, cap. 6), Ross (1983, cap. 7), Clarke (1985), Hampe (1991), Gerla e Tortora (1996), Biacino e Gerla (1996), Ridder (2001; 2002, cap. IV.3), Durand (2007; 2008), Gerla e Miranda (2008), Ringel (2008) e Bostock (2010).

[8] La traduzione venne eseguita anonimamente, probabilmente dagli editori della *Revue de Métaphysique et de Morale*. L'originale inglese non è mai stato pubblicato ed è andato perduto; potrebbe essere stato tra il materiale inedito che venne bruciato su richiesta di Whitehead dopo la sua morte (Lowe 1982, p. 137). L'articolo francese è stato poi ritradotto in inglese da Hurley

sottoposto a successive revisioni nei due libri che seguirono, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge* (1919, d'ora innanzi *PNK*) e *The Concept of Nature* (1920, d'ora innanzi *CN*), dove veniva ufficialmente denominato "metodo dell'astrazione estensiva", e venne nuovamente rivisto in maniera significativa nella parte IV di *Process and Reality* (1929, d'ora innanzi *PR*). Una tecnica per costruire i punti a partire da entità più fondamentali può essere rintracciata anche in una memoria di Whitehead del 1906 intitolata 'On Mathematical Concepts of the Material World'. Tuttavia questa prima tecnica – chiamata "teoria degli interpunti" – è alquanto semplificata e di carattere puramente logico e lo stesso Whitehead la abbandonò, per cui non verrà qui esaminata.[9]

I successivi sviluppi del metodo corrispondono a differenti fasi dell'evoluzione filosofica di Whitehead. Ciò nondimeno si può dire che Whitehead non cambiò mai idea sulle motivazioni originarie di *TRE*, soprattutto sul bisogno di una fondazione della geometria senza-punti dopo il gravoso sforzo dedicato a trattazioni più standard come *The Axioms of Projective Geometry* (1906b) e *The Axioms of Descriptive Geometry* (1907). Possiamo distinguere due motivazioni principali. Una è legata all'adesione, da parte di Whitehead, alla concezione relazionale dello spazio (e, successivamente, del tempo e dello spazio-tempo), cioè all'idea per cui le entità geometriche non sono tra gli elementi fondamentali che costituiscono la realtà ma emergono piuttosto dalle relazioni tra oggetti ed eventi concreti, che per Whitehead era incompatibile con la nozione di punto inesteso. L'altra si ricava dall'epistemologia di Whitehead in senso lato, e in particolare dalla sua filosofia della scienza fondata su una radicale metodologia empirista.

La prima motivazione era già presente nella memoria del 1906, dove la teoria relazionale viene identificata in modo generico con la "teoria della relatività dello spazio di Leibniz". In quel contesto la simpatia di Whitehead per tale teoria è solo vagamente espressa e deriva interamente da un appello al rasoio di Occam (p. 468), ma la sua fondamentale incongruenza con la semplicità dei punti è una delle tesi più importanti. Come commentò successivamente in un articolo per *The Times Educational Supplement*, "in quel periodo le due idee contrastanti erano felicemente adottate dall'intero mondo scientifico e filosofico" (Whitehead 1920b, p. 83). In *TRE*, tuttavia, la simpatia

(1979, pp. 712–741), e le parti non tecniche sono tradotte in appendice a Fitzgerald (1979, pp. 167–178), ma questi testi sono doppiamente distanti dall'originale. Per un breve resoconto sulla relazione originale di Whitehead al *Congrès*, si veda Reymond (1914), pp. 375–376.

[9] Per una discussione della memoria del 1906 si vedano Mays (1961; 1977, cap. 4), Grattan-Guinness (2002), e Leclercq (2011).

di Whitehead per la teoria relazionale dello spazio si articola in maniera più completa, sia riguardo allo "spazio apparente" degli oggetti così come essi ci appaiono, cioè "lo spazio in cui sono percepiti gli alberi verdi, i suoni e gli odori" (p. 423/712), sia in relazione allo "spazio fisico" della scienza, cioè "lo spazio in cui gli elettroni e le molecole si muovono e interagiscono, direttamente o attraverso la mediazione dell'etere" (p. 426/714). L'affermazione di incongruenza cessa così di essere un mero problema logico e diventa parte integrante delle dello sviluppo di una teoria senza-punti:

> La geometria, come teoria matematica, solitamente prende come punto di partenza tutte le entità spaziali fondamentali, o una loro parte: punti, linee curve e rette, superfici, volumi. Le utilizza come idee semplici e primitive [...]. Ma se si adottasse la teoria relazionale dello spazio, per il mondo apparente come per il mondo fisico, questo non può essere il primo passo per una ricerca geometrica. Per la teoria relazionale dello spazio è fondamentale che i punti, per esempio, siano entità complesse, funzioni logiche di quelle relazioni tra gli oggetti che costituiscono lo spazio. Infatti se i punti fossero entità semplici, non definibili logicamente nei termini di relazioni tra oggetti, allora essi sarebbero a tutti gli effetti posizioni assolute. (TRE, pp. 429f/718)

Questa linea di pensiero è confermata in molti articoli scritti negli stessi anni (si vedano Whitehead 1916b, 1916c, 1917), dove la concezione a grandi linee leibniziana della teoria relazionale viene gradualmente modificata da considerazioni ispirate alla recente teoria della relatività,[10] e ritorna, rinforzata, nei trattati successivi:

> Un viaggiatore in un vagone ferroviario vede il punto fisso della carrozza. Il capostazione a lato della carreggiata sa che in realtà il viaggiatore sta osservando un tracciato di punti che da Londra arriva a Manchester. Il capostazione percepisce la sua stazione come fissa sulla terra. Un essere che vivesse sul sole immaginerebbe la stazione che traccia un percorso nello spazio intorno al sole, e il vagone ferroviario tracciarne un altro. Così, se lo spazio non è altro che relazioni tra corpi materiali, i punti intesi come entità semplici scompari-

[10] Whitehead fu tra i primi filosofi a esprimere entusiasmo per la teoria di Einstein, anche se presto sviluppò una sua versione alternativa. La si trova inizialmente delineata in Whitehead (1920b) e nel capitolo 8 di *CN* ed è presentata nella sua completezza in *The Principle of Relativity* (1922). Per una panoramica d'insieme si veda il classico studio di Palter (1960) assieme a Tanaka (1987), von Ranke (1997), Günther (2005, capp. 12–14) e Desmet (2010).

> rebbero. Dove un osservatore vede un punto, un altro individuerà una traccia di punti. (PNK, p. 31)

> Quando si ammette la relatività dello spazio, bisogna anche ammettere che i punti sono entità complesse, costrutti logici che coinvolgono altre entità e le loro relazioni. […] La teoria della relatività dello spazio è in contrasto con qualunque dottrina che contempli un unico insieme di punti in uno spazio senza tempo. (CN, p. 136)

La seconda motivazione è ancora più pervasiva e di più vasta portata, e riflette il crescente coinvolgimento di Whitehead con le esigenze di un'epistemologia radicalmente empirista. La memoria del 1906 non dice nulla a questo riguardo, dal momento che la relazione tra le scienze geometriche e "le varie possibili strade per comprendere la natura del mondo materiale" è esaminata "solamente per il suo interesse logico (cioè matematico)" (p. 465). In *TRE*, tuttavia, le preoccupazioni epistemologiche di Whitehead emergono distintamente, testimone l'importanza attribuita allo "spazio apparente" degli oggetti percepiti, e negli scritti successivi diventano la ragione principale per rivisitare la concezione tradizionale della geometria in una prospettiva senza-punti. L'affermazione più chiara si trova in *PFK*:

> Un'investigazione sui fondamenti della geometria deve spiegare lo spazio come un complesso di relazioni tra oggetti. Deve descrivere cosa è un punto, e deve mostrare come le relazioni geometriche tra i punti scaturiscano dalle relazioni ultime tra le cose ultime che sono immediato oggetto di conoscenza. Così il punto di partenza per una discussione sui fondamenti della geometria è una discussione sul carattere dei dati immediati della percezione. Ai matematici non è concessa la possibilità di assumere, *sub silentio*, che tra questi dati ci siano i punti.

In una certa misura, ciò suggerisce che la seconda motivazione si fonda sulla prima: nella teoria relazionale dello spazio richiesta dalla relatività non ci si può fidare della tradizionale concezione della geometria fondata sui punti. Ma il problema è ancora più generale. Per Whitehead la scienza è "l'organizzazione pensata dell'esperienza" (1916c, p. 411). È "fondata sull'osservazione" e tutte le costruzioni scientifiche sono "semplici esposizioni dei caratteri delle cose percepite" (*CN*, pp. 57, 148). Dal momento che i punti della geometria euclidea sono "una favola metafisica in confronto alla nostra autentica conoscenza percettiva della natura" (*PNK*, p. 6), ne consegue che la stessa geometria, a dispetto della sua utilità scientifica, non può essere presa per buona.

Deve coinvolgere una sorta di astrazione, una qualche "finzione" (1917, p. 163), e una corretta investigazione sui suoi fondamenti deve mostrare fino in fondo il carattere astratto di questa finzione. Qui l'atteggiamento filosofico di Whitehead può ritenersi in linea con il tradizionale punto di vista degli anti-indivisibilisti. Ma, ancora più importante, è qui che la sua spiegazione mira a colmare i vuoti lasciati aperti dai suoi predecessori. Whitehead non intende solo rigettare l'ontologia indivisibilista della geometria classica; vuole offrire un vero e proprio metodo per recuperare le verità della geometrica classica su basi empiricamente accettabili. Il suo scopo è fornire una *fondazione* a pieno titolo della geometria senza-punti.

Vale la pena enfatizzare che per Whitehead questo non è un obiettivo peculiare, come se la geometria fosse in qualche modo unica nel consegnare un quadro ingannevole. Al contrario, è un esempio di quello che Whitehead considera l'obiettivo primario di una filosofia scientifica in generale: mostrare la connessione sistematica tra il "mondo delle idee" ordinato e pulito con cui la scienza termina e il campo disordinato e inadeguato della "esperienza sensibile" da cui essa ha inizio (1916, p. 41). Whitehead espone molti esempi di questo compito, e della "fallacia della concretezza mal riposta" che si presenta ogniqualvolta le "astratte costruzioni logiche" utilizzate nella scienza e nella matematica vengono scambiate per i "fatti concreti" da cui esse emergono (1916, p. 64). Le astrazioni coinvolte nella geometria non fanno eccezione, e il metodo dell'astrazione estensiva mira a fornire la connessione necessaria per evitare la fallacia.

Ciò spiega anche l'entusiasmo di Russell per il metodo quando, partendo dalla bozza di *TRE* che aveva ricevuto da Whitehead un paio di mesi prima del *Congrés* a Parigi, lo applicò immediatamente in *Our Knowledge of the External World* (1914).[11] L'argomento di questo libro era precisamente la relazione tra i "crudi dati dei sensi" e "lo spazio, il tempo e la materia della fisica matematica" (p. v) e proprio all'inizio Russell attribuiva incondizionatamente a Whitehead "la definizione dei punti, la proposta per il trattamento delle 'cose' e degli istanti, e l'intera concezione del mondo della fisica come una *costruzione* piuttosto che un'*inferenza*" (p. vi). In un articolo pubblicato proprio lo stesso anno, Russell aveva in effetti offerto una prima illustrazione

[11] Whitehead gli aveva inviato una stesura preliminare il primo ottobre 1913. Gli inviò una seconda versione il 10 gennaio del 1914, con il seguente commento: "L'ho riscritto e ampliato, e ho inserito diversi nuovi punti di vista. Ne sono soddisfatto. […] L'articolo così com'è – ammesso che sopravviva alle tue critiche – sarà incluso nel vol. IV pressoché immutato" (citato in Miah 1987, p. 24, n. 16).

di quello che chiamava "la massima suprema" di tutto il filosofare scientifico: "Ovunque sia possibile, le costruzioni logiche devono sostituirsi alle entità inferite" (1914, p. 9).[12] Ecco come Russel spiegava la massima (che Carnap avrebbe poi adottato come motto nel suo *Aufbau*, 1928):

> Dato un insieme di proposizioni che nominalmente hanno a che fare con le ipotetiche entità inferite, studiamo le proprietà che tali entità dovrebbero avere affinché le proposizioni siano vere. A forza di piccole ingegnosità logiche, costruiamo poi una certa funzione logica di entità meno ipotetiche che abbia le proprietà richieste. Sostituiamo questa funzione costruita alle ipotetiche entità inferite, e in tal modo otteniamo un'interpretazione nuova e meno dubbiosa del corpo di proposizioni in questione. (1914b, p.10)

Ed ecco come introduce il metodo di Whitehead nel suo libro (che, di conseguenza, contiene la prima delineazione del metodo stesso):

> Un altro aspetto in cui gli spazi dell'esperienza differiscono rispetto allo spazio della geometria e della fisica riguarda i punti. Lo spazio della geometria e della fisica consiste in un infinito numero di punti, che nessuno ha mai visto né toccato. Se esistono punti nello spazio sensibile, si tratta di deduzioni. Non è facile trovare un modo in cui, come entità indipendenti, essi possano essere validamente dedotti dai dati; perciò anche a questo riguardo dobbiamo trovare, se possibile, qualche costruzione logica, qualche complesso assemblaggio di oggetti dati nell'immediatezza, che abbia le proprietà geometriche dei punti. È consuetudine immaginare i punti come entità semplici e infinitamente piccole, ma la geometria non esige in alcun modo che li si debba pensare in tal guisa. Per la geometria è necessario solamente che essi abbiano certe relazioni reciproche che possiedano determinate proprietà astratte enumerate, e potrebbe darsi che un insieme di dati sensoriali serva a questo scopo. Come ciò vada fatto esattamente, ancora non lo so, ma sembra piuttosto certo che possa essere fatto. Il metodo illustrato di seguito, proposto in versione semplificata così da poter essere facilmente utilizzato, è stato creato dal Dr.Whitehead allo scopo di mostrarci come i punti possano essere fabbricati dai dati sensoriali. (1914, pp. 113–114)

[12] Cfr. Russell (1924, p. 363): "Ovunque sia possibile, costruzioni elaborate a partire da entità conosciute sostituiscano inferenze da entità sconosciute". Per un'analisi della massima si veda Spector (1975).

L'idea base

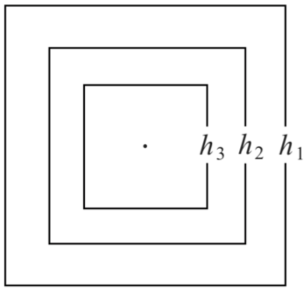
Come funziona il metodo? L'idea fondamentale è semplice, e in 'The Organisation of Thought' Whitehead la riassume come segue: "Un punto è la classe degli oggetti estesi che, nel linguaggio ordinario, contengono quel punto" (1916c, p. 418). Naturalmente questa affermazione è *troppo* semplice. Se davvero non esistessero punti nel senso del linguaggio ordinario, come potremmo identificare le classi in questione? La risposta, come inizialmente elaborata in *TRE*, è ciò a cui il metodo corrisponde realmente, e può essere vista come un'applicazione della teoria generale delle serie convergenti presentata nel secondo volume dei *Principia Mathematica*, Parte V, Sezione C (sappiamo da Russell 1948b, p. 138, che fu proprio Whitehead a farsi carico di questa sezione).[13] Pensare a un punto come una classe *convergente* di entità estese, questo è il concetto. Pensare a un punto come una serie di regioni o volumi contenuti uno nell'altro che decrescono indefinitamente fino a "convergere verso un limite concettuale" (*TRE*, p. 698/730), un insieme infinito di corpi estesi "impacchettati l'uno nell'altro come in una scatola cinese" (CN, p. 61), ma senza la scatola più piccola. Il limite non è mai raggiunto, è un "ideale non esistente" (1919b, pp. 47), e in questo senso non esiste un minimo assoluto corrispondente alla concezione euclidea del punto come qualcosa totalmente privo di parti. Ma nella misura in cui il limite è definito in modo univoco, la serie nel suo insieme – chiamata "classe di inclusione seriale" o "classe astrattiva"[14] – può servire allo scopo. Possiamo cioè trattare la serie stessa *come* un punto. E ciò che vale per i punti vale anche per le linee e le superfici, o per qualsiasi altra presunta entità di ordine inferiore che troviamo nella geometria ordinaria:

> Non abbiamo bisogno di una definizione logicamente semplice di punti, linee e superfici, ma di definizioni che preservino le proprietà semplici e generali che vengono loro attribuite in geometria.

[13] Ciò potrebbe suggerire che il metodo presentato da Whitehead nella memoria del 1906, dove i punti sono definiti nei termini di insiemi di linee convergenti (come nella geometria proiettiva), è davvero la prima elaborazione del metodo dell'astrazione estensiva. Questo è per esempio il punto di vista di Fitzgerald (1979, p. 40), per la quale "è molto piccolo il passo da una serie convergente di linee rette a una serie convergente di volumi sovrapposti". In realtà, però, il passo richiede un cambio significativo nella nozione di serie convergente, come spiegato sotto, e sappiamo dalla *Transactions* che la memoria di Whitehead venne ricevuta il 22 settembre e letta dinanzi alla Royal Society il 7 dicembre 1905, mentre la teoria presentata nei *Principia* non venne completata se non dopo il 1905. Vedi Hurley (1981), p. 82.

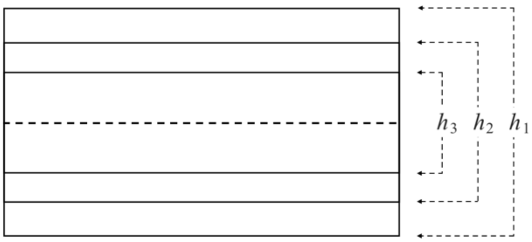
[14] Il primo termine è usato in *TRE*; il secondo (o la sua variante "insieme astrattivo") è il termine più comune usato in *PNK, CN* e *PR*.

Per una semplice illustrazione in 2D (adattata da *PNK*, §30·3), si consideri una serie di quadrati concentrici con i lati di dimensione sempre più ridotta, h_1, h_2, h_3, …, come nella Figura 1. Con h_n che tende a 0 al crescere di n, l'insieme di questi quadrati forma una classe astrattiva che converge nel loro centro comune – un punto.



1.

Allo stesso modo, si consideri una serie di rettangoli concentrici, ognuno con la stessa base e l'altezza in continua diminuzione, h_1, h_2, h_3, …, come nella Figura 2. Con h_n che tende ancora a 0, l'insieme dei rettangoli forma una classe astrattiva che converge verso un segmento di linea retta.



2.

In uno spazio 3D la situazione è perfettamente simile, usando per esempio dei cubi o dei prismi. Chiaramente, i limiti di tutte queste serie non sono a loro volta elementi delle classi che li definiscono. Un punto non è un quadrato (o un cubo), e una linea non è un rettangolo (o un prisma). Ma proprio questa è l'idea. Tali limiti non esistono; ci *sono* solamente regioni estese o volumi estesi. E la proposta di Whitehead è di definire punti e linee, non come i limiti di tali serie, bensì come le serie stesse (o meglio, come classi di equivalenza di serie siffatte, come vedremo nella prossima sezione).

Come possono, queste strutture complesse, avere le stesse proprietà e fare il medesimo lavoro tradizionalmente assegnato alle loro controparti euclidee, semplici e di dimensione inferiore? C. D. Broad, nella sua recensione di *PNK* (1920), e poi di nuovo nel suo libro *Scientific Thought* (1923), dove il metodo di Whitehead è pienamente abbracciato e promosso come "i prolegomeni a qualsiasi futura Filosofia della Natura" (p. 4), mostra che l'idea è essenzialmente un'applicazione di un principio ben noto in certe aree della matematica pura. Per fare il suo esempio, che Whitehead stesso menziona brevemente in *TRE* (p. 432/720), i numeri irrazionali possono essere definiti come serie convergenti di numeri razionali. Per esempio $\sqrt{n}$ può essere definita come la serie delle frazioni razionali i cui quadrati sono inferiori a *n*. Inizialmente verrebbe da prendere i *limiti* di queste serie, ma ovviamente non c'è modo di mostrare che i limiti esistano e per questa ragione è consuetudine considerare le serie stesse. Perché chiamarle *numeri*? Per gentile concessione, cioè perché si comportano alla maniera in cui si suppone si comportino i numeri. A condizione che i significati di "addizione", "moltiplicazione", ecc. siano estesi in modo opportuno, queste serie risultano avere tutte le proprietà che si suppone abbiano i numeri irrazionali e obbediscono esattamente alle stesse leggi di addizione, moltiplicazione, ecc. Fintantoché accettiamo che questo è tutto ciò che è richiesto affinché certe entità siano qualificabili come numeri, la cortesia è quindi giustificata e possiamo continuare a ragionare sulle nostre serie come se avessimo a che fare con numeri di tipo familiare. Si potrebbe certamente non essere d'accordo, protestando che i numeri non possiedono affatto la struttura complessa che hanno le serie convergenti. Ma per ciò che riguarda la teoria dei numeri, la preoccupazione è irrilevante. È semplicemente "un pregiudizio di cui liberarsi, come la nostra sensazione che gli abitanti dell'Australia resistano precariamente a terra grazie a una sorta di aspirazione, come le mosche sul soffitto" (Broad 1923, p. 44).[15] Esattamente nella stessa maniera, quindi, possiamo essere giustificati nella decisione di chiamare punti, linee, ecc. le serie complesse che Whitehead chiama "classi astrattive". Non

[15] Qui si potrebbe ricordare il celebre scambio tra Gottlob Frege e David Hilbert. In una lettera del 27 dicembre 1899 Frege scrisse che pensava di aver compreso i *Grundlagen* (1899) di Hilbert ma si perdeva nel momento in cui i punti vengono definiti come coppie di numeri reali, lamentando che "qui agli assiomi viene fatto portare un carico che dovrebbe spettare alle definizioni" (Frege 1976, p. 61/35). Per una discussione approfondita, si veda Shapiro (2005).

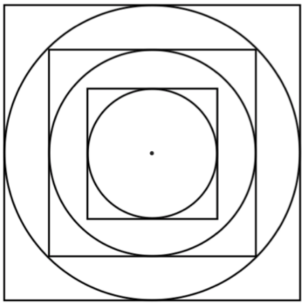
c'è alcuna garanzia che i loro limiti esistano. Se condividessimo i dubbi empirici di Whitehead, avremmo anzi buone ragioni per pensare che non esistano affatto. Ma le classi stesse possono servire al medesimo scopo, e se si riesce a dimostrare che è effettivamente così, tanto basta. Per citare ancora una volta Broad, la cui prosa è spesso più elegante di quella di Whitehead:

> Alla scienza non interessa minimamente quale sia la natura interna di un certo termine, a condizione che faccia il lavoro che gli è richiesto. Se riusciamo a dare una definizione dei punti che faccia rispettare un paio di precise condizioni, non avrà importanza se poi i punti in se stessi si rivelassero entità molto differenti rispetto a come li avevamo concepiti. Le due condizioni sono (i) che i punti devono stare fra loro nelle relazioni richieste dalla geometria, e (ii) che rispetto alle aree e ai volumi finiti i punti devono stare in una relazione tale che si possa dare un senso ragionevole all'affermazione che quelle aree e quei volumi possono essere analizzati in modo esaustivo come insiemi di punti. Qualsiasi entità che rispondesse a queste due condizioni farebbe il lavoro di un punto, e potrebbe onestamente venire chiamata punto, non importa quali siano le sue altre proprietà. Questo fatto cruciale, che ciò che importa alla scienza non è la natura interna degli oggetti ma le loro relazioni reciproche [...], è stato riconosciuto innanzitutto dalla matematica pura. Il grande merito di Whitehead è di averlo applicato alla fisica (Broad 1923, p. 39).

Miglioramenti (I)

L'analogia con i numeri irrazionali non costituisce, tuttavia, l'intera storia. Nel caso delle "classi astrattive" di Whitehead, la spiegazione intuitiva appena offerta necessita di un certo numero di miglioramenti, ed è esattamente qui che l'analisi di Whitehead mostra il suo reale merito e la sua bellezza, non solo da un punto filosofico ma anche sul piano tecnico. Due considerazioni, in particolare, sono importanti affinché la teoria ottemperi a ciò che ha promesso.

La prima riguarda proprio l'idea di identificare i punti direttamente con un insieme di regioni, come suggerirebbero gli esempi forniti sopra. Questa idea solleva un ovvio problema, vale a dire che potrebbero esserci *molte* serie di regioni estese che intuitivamente convergono verso lo stesso limite. Per esempio, il "punto" della Figura 1 potrebbe anche essere identificato come la serie di tutti i cerchi concentrici di diametro h_1, h_2, h_3, ..., come mostra la Figura 3.



3.

Analogamente in 3D, dove lo stesso punto può per esempio essere identificato con una serie convergente di cubi concentrici o con una serie di palle concentriche. Sembrerebbe del tutto arbitrario scegliere una serie piuttosto che un'altra; dovremmo semmai prenderle entrambe. Anzi, sarebbe giusto identificare il punto con *tutte* le serie che intuitivamente convergono verso lo stesso limite. E ciò richiede che si disponga anzitutto di una modalità atta a identificare le serie stesse – un modo per individuarle senza far riferimento ai loro limiti (di per sé non-esistenti).

Whitehead era ben conscio di tale complicazione. Per la verità si potrebbe far finta di niente e selezionare una serie in modo arbitrario. Dopo tutto stiamo solo cercando delle strutture che svolgano un certo lavoro, non importa *quali*. Pensatori successivi saranno perfettamente d'accordo con questa soluzione, a partire da Alfred Tarski, la cui "Geometry of Solids" (1929) è profondamente debitrice a Whitehead. Lavorando in 3D, Tarski userà "sfera" (intendendo ciò che comunemente si chiama "palla") come primitivo e definirà un punto geometrico come la classe di tutte le sfere che sono concentriche (in un senso appropriatamente definito) rispetto a una sfera data.[16] Avrebbe potuto usare come primitivo un altro solido, ma il risultato sarebbe stato equivalente.[17] La soluzione di Whitehead, tuttavia, che si può già tro-

[16] Per un sviluppo completo della geometria di Tarsky si vedano Gruszczyński e Pietruszczak (2008), Sitek (2017), e la discussione in Betti e Loeb (2012); per una semplificazione, Clay (2017). Vedi anche Bennett (2001) per una variante del primo ordine (senza quantificazione sulle classi).

[17] Lo stesso vale per spazi di altre dimensioni, risultando nell'ampia famiglia di quelle che Borgo e Masolo (2010) chiamano "mereogeometrie piene". Per esempio, Borgo (2013) ha mostrato che gli ipercubi e i simplessi regolari risultano in sistemi equivalenti in spazi di *dimensione* $n \geq 2$. Si veda anche Gerla e Gruszczyński (2017) per una variante del sistema di Tarski basato sulla nozione

vare in *TRE*, è differente. Essa consiste nell'evitare scelte arbitrarie introducendo un'opportuna relazione di equivalenza tra classi astrattive, in modo da identificare tutti le serie candidate. I punti (e le linee, ecc.) vengono poi definiti, non come classi astrattive specifiche, ma come *classi di equivalenza* di classi astrattive.[18]

L'appropriata relazione di equivalenza dipende dai dettagli, ma parlando generalmente può essere definita come segue. Diciamo che un insieme di regioni A *copre* un insieme di regioni B quando ogni elemento di A "include" o "si estende su" qualche elemento di B, ossia quando contiene qualche elemento di B come parte propria.[19] Questa nozione di copertura è definita per tutti gli insiemi, ma il caso interessante è quando A è una classe astrattiva infinitamente convergente. In questo caso, come nota Whitehead (*PNK*, pp. 104-105), anche B deve avere un numero infinito di elementi e non può esistere alcuna regione inclusa in ogni elemento di B. In particolare, quando A copre B e sia A che B sono classi astrattive, ogni elemento *x* di A includerà tutta la porzione convergente di B che segue il primo elemento di B incluso in *x*. Su queste basi, diciamo adesso che due insiemi A e B sono a *inclusivamente uguali*, o *uguali in forza astrattiva*, quando ciascun insieme copre l'altro. Di nuovo, questa relazione è definita per tutti gli insiemi, ma il caso che ci interessa è quando abbiamo a che fare con classi astrattive. Per esempio, se A e B sono due insiemi di quadrati e cerchi concentrici, e se ogni cerchio è inscritto in uno dei quadrati e ogni quadrato ha inscritto un cerchio (come abbiamo assunto tacitamente nella Figura 3), allora i due insiemi si copriranno l'un l'altro e di conseguenza saranno inclusivamente uguali. In termini generali, questa relazione è ovviamente simmetrica, e nel caso delle classi astrattive è anche riflessiva (ogni classe è inclusivamente uguale a se stessa) e transitiva (per la transitività della relazione di inclusione). In altre parole, l'uguaglianza inclusiva è una relazione di equivalenza. Ed è proprio nei termini di questa relazione che Whitehead ha formulato le sue definizioni ufficiali. Un punto non è una classe astrattiva di quadrati, o una classe astrattiva di cerchi, o una classe astrattiva di cerchi o quadrati concentrici; è la classe di equivalenza, relativa all'uguaglianza inclusiva, di tutte queste classi astrattive, cioè di tutte quelle classi astrattive che, nel linguaggio comune, si direbbero convergere nello stesso punto. Lo stesso discorso vale per le linee. E

primitiva di "ovale" (estendendo Śniatycki 1968, che usa come nozione base quella di "semi-piano").

[18] La "formulazione preliminare" di Russell era leggermente diversa; si veda Russell (1914, p. 115).

[19] Il termine "include" viene da *TRE*, e tornerà in *PR*; in *PNK* e *CN* Whitehead preferisce "si estende su". Più avanti torneremo sul significato preciso e sul trattamento assiomatico di questi termini.

vale anche (in 3D) per le superfici, che possono essere trattate come classi di equivalenza di classi astrattive di volumi che convergono su aree specifiche. La proposta di Whitehead non è semplicemente un'applicazione geometrica dei modi standard per definire i numeri reali; è un'applicazione, se così si può dire, della definizione di Cantor del 1872, che in effetti identificava i numeri reali come classi di equivalenza di serie convergenti – sequenze di Cauchy – di numeri razionali.[20]

La seconda importante precisazione riguarda proprio la nozione di classe astrattiva. Finora la abbiamo usata intuitivamente, facendo affidamento alla metafora usata da Whitehead della scatola cinese senza fondo. È una buona metafora, e coglie perfettamente il senso del metodo di Whitehead, che egli stesso intendeva come un'istanza della "convergenza verso la semplicità attraverso la diminuzione dell'estensione".

> Il principio si estende a ogni parte dell'intero campo delle presentazioni sensoriali. [...] Perciò l'oggetto-punto temporale e l'oggetto-punto spaziale, e il doppio oggetto-punto nello spazio e nel tempo, deve essere concepito come una costruzione intellettuale. Il fatto fondamentale è l'oggetto sensoriale, esteso nel tempo come nello spazio, legato ad altri oggetti dello stesso tipo attraverso la relazione fondamentale parte-tutto e soggetto alla legge della convergenza verso la semplicità quando procediamo nel pensiero attraverso una serie di parti successive. [...] L'origine dei punti rappresenta lo sforzo di ottenere un pieno beneficio dal principio di convergenza verso la semplicità. Finché non si applica questo principio, un punto è un modo ingombrante di porre l'attenzione a un insieme di relazioni tra oggetti-idee della percezione. (Whitehead 1917, pp. 146, 161 e sgg.)

(Il principio è citato ripetutamente in *CN* nel capitolo relativo, vedi pp. 79, 82, 85.) Formalmente, tuttavia, occorre una caratterizzazione migliore, e i dettagli sono molto meno semplici di quello che la metafora potrebbe suggerire.

Come la precedente citazione chiarifica, il concetto chiave è quello di *parti* successive. Questo concetto è già esplicito in *TRE*, dove la relazione di inclusione viene detta "analoga, nelle sue proprietà formali, alla relazione tra il tutto e le parti" (p. 432/721) e dove la IV sezione è dedicata interamente alle proprietà in questione. In effetti, considerando che *TRE* era stato origi-

---

[20] Cfr. la Prefazione del 1910 ai *Principia Mathematica*, dove si dice che "nella [...] teoria delle serie, il nostro intero lavoro è basato su quello di Georg Cantor" (p. ix).

nariamente presentato nel 1914, questa sezione dell'articolo potrebbe a buon diritto considerarsi il primo vero tentativo di un trattamento rigoroso della relazione parte-tutto, il soggetto della mereologia, la cui nascita ufficiale viene solitamente accreditata a Stanisław Leśniewski (1916).[21] Per Whitehead, la relazione di inclusione propria è essenzialmente la conversa della relazione di parte propria ed è caratterizzata sul piano formale come transitiva e asimmetrica, perciò irriflessiva. In altre parole, è un ordine stretto parziale. Questa caratterizzazione si ritrova anche negli scritti successivi (con "includere" sostituito da "estendersi su"), che tuttavia sono espliciti nel richiedere che la relazione di inclusione soddisfi due ulteriori proprietà. Una è la densità: ogniqualvolta una entità estesa è propriamente inclusa in un'altra, ce n'è sicuramente una terza inclusa tra loro. L'altra proprietà equivale al requisito che la relazione di inclusione sia aperta: ogni entità include ed è a sua volta inclusa in un'altra. In una direzione, ciò significa che la mereologia di Whitehead è decisamente anti-atomista, cioè, nella terminologia resa celebre da David Lewis (1991, p. 20), "gunky". L'altra direzione corrisponde al requisito duale della anti-coatomicità, il che significa che la mereologia di Whitehead è anche "junky" (nella terminologia di Schaffer 2010, p. 64). Nessuno di questi postulati aggiuntivi appartiene a quella che è ora conosciuta come mereologia classica, ma entrambi sono emblematici del punto di vista di Whitehead sulla "continuità della natura" (*PNK*, pp. 77, 101–102; *CN*, p. 60).[22] Merita anzi notare che il postulato della anti-coatomicità è formalmente in tensione con la mereologia classica e rende la mereologia di Whitehead decisamente non-standard.[23]

---

[21] Whitehead non menziona mai Leśniewski e probabilmente non lo conosceva, ma Leśniewski venne a conoscenza (grazie a Tarski) della teoria di *PNK* e la esaminò con un certo dettaglio (Leśniewski 1927–1931, parte IV, n. 84, pp. 286–291/258–263). Si vedano anche gli appunti delle lezioni di Leśniewski in Srzednicki e Stachniak (1988, cap. 6). Sull'importanza di Whitehead nella storia della mereologia si veda Simons (1991) e Ridder (2002, cap. IV.3.1).

[22] A dire il vero, alcuni critici li hanno trovati in contrasto con l'epistemologia di Whitehead. Per esempio, già Lenzen (1926, pp. 184–185) sostiene che l'esperienza sensoriale non fornisce l'infinità di insiemi richiesti dal principio di densità. Si veda tuttavia la replica di Murphy (1926, pp. 204–205), che insiste sulla distinzione tra "dato nella consapevolezza-dei-sensi" e "trovato a partire dall'analisi logica del dato", e Ushenko (1949, p. 634, n. 34), che difende il principio sulla base del fatto che non richiede una reale manifestazione di *tutte* le regioni che costituiscono un punto, ma semplicemente che *ogni* regione costituente dovrebbe essere osservabile "in linea di principio". Queste repliche non sono accettate dai critici successivi, tra cui Grünbaum (1953).

[23] Sappiamo da Tarski (1935) che la mereologia classica, per come è radicata nel lavoro di Leśniewski, è essenzialmente un'algebra booleana senza lo zero. (Per i dettagli si veda Cotnoir e Varzi 2019.) Ciò è compatibile sia con la densità sia con l'anti-atomicità ma non con l'anti-coatomicità, per effetto del cosiddetto principio di "composizione non ristretta". Questo principio – assente in ogni versione

Data la relazione di inclusione, in *TRE* la nozione di classe astrattiva è quindi definita come segue: Un insieme di entità estese è una *classe astrattiva* (o "classe di inclusione seriale") se e solo se (i) è ordinata totalmente dalla relazione di inclusione, cioè per ogni coppia dei suoi elementi uno include l'altro, e (ii) non esiste alcun elemento incluso in tutti gli altri elementi (*TRE*, p. 443/731). La stessa definizione appare essenzialmente nell'abbozzo di Russell, dove la nozione rilevante è quella di "serie-recintate" (1914, p. 115), e tornerà in *PNK* (p. 304) e *CN* (p. 79), dove la teoria è ufficialmente battezzata "teoria dell'astrazione estensiva".

Miglioramenti (II)

È chiaro in che modo questa definizione intenda fornire una controparte formale della metafora delle scatole cinesi. La prima condizione cattura l'idea che una classe astrattiva formi una serie convergente di estensioni sempre più piccole, la seconda condizione garantisce che la serie non raggiunga mai il suo limite. Inoltre, è chiaro che questa definizione giustifica le proprietà della relazione di copertura menzionate poco sopra, forzando l'uguaglianza inclusiva a comportarsi come una relazione di equivalenza. Filosoficamente, questo è un passo cruciale nello sviluppo della teoria di Whitehead in quanto rimuove ogni dubbio che il ricorso alle serie convergenti possa essere circolare. Come Broad mostra (1923, pp. 45 sgg.) – e come Stebbing enfatizza (1930, pp. 450–451) – viene naturale riassumere la teoria di Whitehead dicendo che essa definisce punti, linee, ecc. come classi di equivalenza di classi astrattive che convergono su punti, linee, ecc., ma l'apparente circolarità di questa caratterizzazione è legata a una semplice convenienza euristica. L'essenza della teoria risiede esattamente nel fatto che si possono dire queste cose in termini che coinvolgono soltanto entità estese e le loro reciproche relazioni, e la definizione mereologica di "classe astrattiva" fornisce le risorse necessarie per farlo. In particolare, si potrebbe dire che una classe astrattiva converge in quello che comunemente viene chiamato punto *se e solo se è coperta da ogni classe*

della teoria di Whitehead – garantisce che ogni pluralità non-vuota abbia una fusione, cioè qualcosa contenente ognuna di quelle cose come parte e non contenente alcuna parte che non abbia una parte in comune con nessuna di quelle cose. Data la composizione non ristretta, ci sarà sempre un'entità universale – la fusione di tutte le cose – che non è parte propria di alcunché. Va notato, tuttavia, che mentre il metodo dell'astrazione estensiva richiede gli altri postulati, il postulato di anti-coatomicità è semplicemente un'espressione del punto di vista di Whitehead e non gioca alcun ruolo attivo.

astrattiva che essa stessa copre (perciò, se e solo se è di inclusivamente uguale a ogni classe siffatta). Questa è l'essenza della proposta di Whitehead,[24] e non fa nessuna menzione dei punti.

Il problema, semmai, è se la definizione mereologica di classe astrattiva sia davvero adatta al compito che deve svolgere. Whitehead ne era soddisfatto, non solo in occasione della sua conferenza a Parigi del 1914 e nel tempo intercorrente fino alla sua pubblicazione del 1916, ma anche negli anni che precedettero la pubblicazione di *PNK* nel 1919, quando i suoi interessi passarono dalla fondazione della geometria come teoria dello spazio senza-punti alla sua controparte nel reame del tempo.[25] In effetti era inizialmente convinto di poter inserire la teoria nell'atteso quarto volume dei *Principia*,[26] e lo stesso *TRE* era stato scritto usando il simbolismo e la logica delle classi dei primi tre volumi (che in seguito Whitehead avrebbe abbandonato).[27] Se cambiò programma e abbandonò il progetto, fu perché non apprezzò la decisione di Russell di includere una "spiegazione preliminare approssimativa" della teoria nel suo libro del 1914, al punto da rifiutare di condividere con Russell qualsiasi futuro materiale a riguardo dopo la pubblicazione di TRE. (Fu tale rifiuto, secondo l'*Autobiografia* di Russell, 1968, p. 101, a "porre fine" alla loro collaborazione.[28]) A Whitehead la sua teoria piaceva e ne andava fiero. La chiamò addirittura "un'immagine della bellezza".[29] Ciò nonostante, la teoria era difettosa. La definizione mereologica di classe astrattiva non funzionava.

Whitehead iniziò ad affrontare il problema in *PNK* e vi tornò in *CN*, dove

[24] Trascuriamo qui alcuni dettagli. Si veda avanti, n. 30.

[25] Nella memoria del 1906 Whitehead sosteneva ancora, citando Russell (1901), che "il tempo deve essere composto da istanti" (p. 467). Alla fine del 1911, tuttavia, la sua posizione era cambiata: "L'altra notte [...] mi abbagliò d'improvviso l'idea che il tempo potesse essere considerato esattamente alla stessa maniera in cui tratto lo spazio. [...] Il risultato è una teoria relazionale del tempo, esattamente a quattro gambe come quella dello spazio. Per quanto riesca a vedere, supera tutte le vecchie difficoltà e oltretutto abolisce l'istante nel tempo" (lettera a Russell, 3 Settembre 1911; in Eames 1989, pp. 111–112). Lo stesso Russell nel frattempo aveva modificato il proprio punto di vista, e infatti il suo uso della teoria di Whitehead in *Our Knowledge of the External World* riguarda la costruzione di istanti temporali piuttosto che di punti spaziali: "Gli eventi di cui siamo coscienti non durano un mero istante matematico ma sempre un tempo di una certa durata, per quanto breve" (1914, p. 116).

[26] Si veda la lettera citata alla n. 11

[27] L'unica eccezione sembra essere Whitehead (1934).

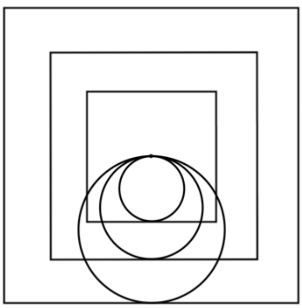
[28] Cfr. la lettera di Whitehead dell'8 gennaio 1917 citata da Russell (1968, pp. 100-101): "Non voglio che tu abbia i miei appunti, che nei capitoli sono lucidi, per precipitarli in ciò che dovrei considerare come una serie di mezze verità. Ho lavorato a queste idee a varie riprese per tutta la mia vita, e rimarrei completamente a nudo da un lato della mia esistenza speculativa se le consegnassi a qualcun altro per elaborarle." Su questo e altri episodi che hanno portato alla conclusione della collaborazione tra Whitehead e Russell, si vedano Durand (2008b), Desmet (2009) e Landini (2016).

[29] Nella lettera citata sopra alla n. 25.

troviamo la sua formulazione più chiara. In quel contesto il discorso riguarda gli "eventi-particelle" anziché i punti spaziali, ma il problema è essenzialmente geometrico e si applica alla definizione di punto in senso lato:

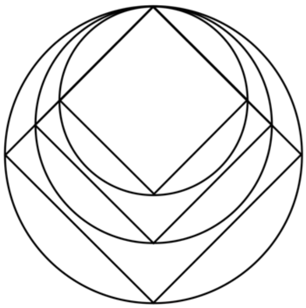
> La difficoltà è la seguente. Una volta definiti gli eventi-particelle è facile individuare l'aggregato di eventi-particelle che formano il confine di un evento; e da lì, per una coppia qualsiasi di eventi di cui uno sia parte dell'altro, definire il possibile punto di contatto ai loro confini. Possiamo così comprendere tutte le tortuosità della tangenza. In particolare, possiamo pensare a un insieme astrattivo di cui tutti i membri hanno un punto di contatto con lo stesso evento-particella. È facile allora dimostrare che non esisterà alcun insieme astrattivo con la proprietà di essere coperto da ogni insieme astrattivo che esso stesso copre. (CN, p. 87)

Un analogo spaziale in 2D può servire da esempio. Consideriamo ancora le due classi astrattive di quadrati e di cerchi della Figura 3, ma con i cerchi disposti come nella Figura 4. Come prima, vorremmo poter affermare che entrambe le classi convergono verso il medesimo limite, il punto al centro, benché in questo caso i cerchi vi convergerebbero tangenzialmente. Tuttavia, se seguiamo le definizione di Whitehead, *non si può* dire che la classe dei quadrati converge verso il punto al centro. Ciò richiederebbe che la classe sia coperta da ogni classe astrattiva che essa copre. In particolare, dal momento che copre la classe dei cerchi, dovrebbe valere anche il contrario. Chiaramente, però, le cose non stanno così. A differenza della Figura 3, dove ogni cerchio include un quadrato, qui nessuno dei cerchi include un singolo quadrato.



4.

Ora, questo non sarebbe di per sé un problema. Tutto ciò che ne segue è che, piuttosto sorprendentemente, la classe dei quadrati non è tra le classi astrattive inclusivamente uguali che definiscono quel particolare punto. Tuttavia, è semplice rendersi conto che lo stesso discorso vale anche per la classe dei cerchi. Per esempio, ogni cerchio circoscrive un quadrato che ha il punto in esame come uno dei suoi vertici, come mostrato nella Figura 5. L'insieme di tali quadrati forma una classe astrattiva: è ordinato totalmente dalla relazione di inclusione e non ha un elemento minimo. E mentre quest'insieme è coperto da quello dei cerchi, l'opposto non vale: nessuno dei quadrati include alcun cerchio.



5.

Si comincia allora a capire perché Whitehead dica che *nessuna* classe astrattiva avrà le proprietà desiderate. Questa nuova classe di quadrati concentrici, infatti, non se la cava meglio, come si può notare considerando, per esempio, le due classi astrattive di triangoli ottenute tagliando ogni quadrato a metà lungo la diagonale verticale. E nemmeno queste classi se la caveranno, dal momento che ogni triangolo può essere diviso in due parti uguali con lo stesso punto al vertice. In breve, sembra proprio che la classe di equivalenza delle classi astrattive che intuitivamente convergono verso il nostro punto – la classe che, nella teoria di Whitehead, dovrebbe *essere* il punto – potrebbe risultare vuota. (E, infatti, come afferma Whitehead, si può provare che è così; si veda per esempio Coppola et al. 2010, teorema 5.8).

Esistono due modi di affrontare questo problema. La risposta iniziale di Whitehead, in *PNK* come anche in *CN*, è di relativizzare la relazione di equivalenza dell'uguaglianza inclusiva a opportune "condizioni costruttive" sulle classi astrattive.[30] I dettagli sono estremamente complicati e li possiamo saltare. È sufficiente dire che per questa strada si finisce con l'abbandonare l'idea che i punti si possano definire in modo diretto. Inoltre, mentre funziona per il semplice caso in 1D degli istanti di tempo (eventi-particelle), la soluzione non è propriamente generalizzabile a spazi di dimensioni superiori. Nelle parole di David Bostock, si tratta fondamentalmente di "una scappatoia" (2000, p. 24). L'altra opzione è di ammettere che la definizione di classe astrattiva è difettosa e fornire una riparazione idonea. Questa sarà la strategia di Whitehead nell'ultima esposizione della teoria, presentata nella IV parte di *PR*. E la riparazione è quella naturale.[31] Consiste nel rimpiazzare la caratterizzazione puramente mereologica della relazioni di inclusione con una trattazione più forte, genuinamente *mereotopologica*, nella quale "le tortuosità della tangenza" possano essere affrontate correttamente.[32]

L'idea arriva da un suggerimento avanzato in una breve nota di Theodore de Laguna (1921), ulteriormente elaborato dallo stesso autore nell'articolo "Point, Line, and Surface, as Set of Solids" (1922b). Essenzialmente lo stesso suggerimento era stato elaborato (indipendentemente) da Jean Nicod nella sua dissertazione, *La géométrie dans le monde sensible*, terminata proprio prima della sua morte prematura nel 1924 e pubblicata poco dopo con una prefazione di Russell (Nicod 1924, cap. I.4). Whitehead doveva essere a conoscenza del lavoro di Nicod, e infatti sappiamo dalla Prefazione di Roy Harrod alla traduzione inglese del 1970 che nel 1930 Whitehead aveva citato Nicod tra coloro "in cui era stato particolarmente interessato per progressi ulteriori" in "quelle questioni fondamentali alle quali aveva lavorato in collaborazione con Bertrand Russell" (p. v). Malgrado ciò, non vi è menzione esplicita di Nicod in *PR*. Il debito di Whitehead verso de Laguna, tuttavia, è pienamente riconosciuto, compresa l'affermazione che grazie al suo approccio "le mie difficoltà nella definizione di punto, senza ricorso ad altre considerazioni, possono essere superate" (*PR*, p. 287).

Ecco come l'idea fu inizialmente formulata:

> Il metodo dell'astrazione estensiva [...] potrebbe essere semplificato e rafforzato considerevolmente se, al posto della relazione parte-tutto, o "estendersi

---

[30] Per essere precisi, questo tipo di relativizzazione era già stato adottato in *TRE* per gestire certi *casi* problematici. In *PNK* e *CN* diventa un carattere centrale del sistema.

[31] Anche se non l'unica. Vedi per esempio Gerla e Paolillo (2010) per una strategia differente.

[32] Va notato che il problema non sarebbe nemmeno sorto se i punti fossero stati definiti direttamente come classi astrattive di regioni concentriche di forme prefissate scelte arbitrariamente, saltando del tutto le classi di equivalenza. Questa è la ragione per cui la teoria di Tarski, basata sulle sfere, è puramente mereologica.

> su", si assumesse la relazione di "contenere" – nel senso non solo di includere una parte, ma di avvolgerla completamente. In questo senso, un solido geometrico ne conterrebbe un altro se il secondo è parte del primo e nessun solido esterno al primo può toccare il secondo. (De Laguna 1921, p. 216)

Questa invece la formulazione di Nicod:

> Dobbiamo restringere la nostra attenzione a quelle classi astrattive i cui punti in comune sono interni a (e non sulla superficie di) tutti i volumi della classe. Questa condizione preliminare è soddisfatta se stipuliamo che, dati due volumi qualsiasi della classe, uno debba sempre contenere l'altro senza tangenza. (Nicod 1924, p. 29/25)

In altre parole, l'idea è quella di ridefinire la nozione di classe astrattiva richiedendo che la relazione di inclusione sia analoga, non alla conversa della relazione di parte propria, ma alla conversa della relazione di parte non-tangenziale – una relazione che è chiaramente più forte e strettamente mereotopologica. Ciò escluderebbe i casi problematici, dato che le serie convergenti in punti di contatto come quelle delle Figure 4 e 5 non verrebbero più ammesse. Nella terminologia originale di de Laguna (abbandonata in 1922b), queste modifiche trasformerebbero le classi astrattive di Whitehead in "insiemi evanescenti" e la definizione di "punto" potrebbe essere rivisitata di conseguenza: *un punto* è *una classe di equivalenza di insiemi evanescenti che sono coperti da ogni insieme evanescente che essi coprono*.

Resta da capire come questa nuova relazione di "contenimento" possa essere caratterizzata in maniera adeguata. Esistono, naturalmente, trattamenti topologici standard pronti all'uso. Tuttavia la topologia standard, come la geometrica classica di Euclide, è basata sui punti. Quello che serve è una caratterizzazione senza-punti che faccia uso esclusivamente di regioni estese. Da questo punto di vista si può quindi dire che il progetto originale era quantomeno incompleto: una geometria senza-punti necessita di una *topologia senza-punti*. Proprio questo è il compito che Whitehead, ispirato da de Laguna, affronta nell'impianto finale della sua teoria, la versione di *PR*.

La formulazione finale

De Laguna non ci offre assiomi dettagliati. La nota del 1921 enuncia semplicemente il suggerimento; l'articolo del 1922 presenta un'ambiziosa teoria basata sul primitivo "*x* connette *y* e *z*" (inteso informalmente come la relazione che sussiste quando *x* ha almeno un punto in comune con *y* e almeno un punto in comune con *z*)[33] e contiene sia la definizione di "*x* è parte di *y*" sia quella di "*x* contiene *y*", ma il trattamento assiomatico di queste nozioni resta carente.[34] Perciò, a parte la decisione fondamentale di accogliere il suggerimento di de Laguna, i dettagli della teoria in *PR* sono quasi interamente opera di Whitehead. In effetti Whitehead non segue nemmeno il suggerimento in maniera letterale. La sua teoria non si basa su una relazione primitiva di contenimento. Piuttosto, Whitehead definisce il contenimento nei termini di una variante binaria del primitivo di de Laguna in 1922b, "*x* è connesso a *y*", inteso informalmente come la relazione topologica che sussiste quando *x* e *y* condividono almeno un punto. (Le due varianti sono ovviamente interdefinibili.[35]) Whitehead non spiega la ragione di questa sua scelta, ma probabilmente è di duplice natura: in parte è un tributo all'enfasi sulla "continuità della natura" dei lavori precedenti, in parte riflette il suo nuovo punto di vista sull'"ordine della natura", in accordo al quale "il mondo fisico è tenuto assieme da un generale tipo di relazionalità che lo costituisce come un continuo estensivo" (*PR*, p. 96). In ogni caso è chiaro che la nuova teoria non è semplicemente un miglioramento delle precedenti; essa comporta una genuina revisione e Whitehead le dà un nuovo nome: "teoria della connessione estensiva".

Ci si potrebbe chiedere per quale motivo Whitehead decida di adottare la relazione topologica di connessione come *primitiva*. Dopo tutto, i suoi due libri precedenti utilizzavano già una nozione di connessione (o "congiunzione"), ed era definita in termini puramente mereologici. La definizione era: *x* e *y* sono connessi se e solo se esiste uno *z* tale che (i) sia *x* che *y* hanno una parte in comune con *z* e (ii) ogni parte di *z* ha una parte in comune con almeno uno tra *x* e *y* (*PNK*, p. 102; *CN*, p. 76). Uno sguardo alla Figura 6 basterà per

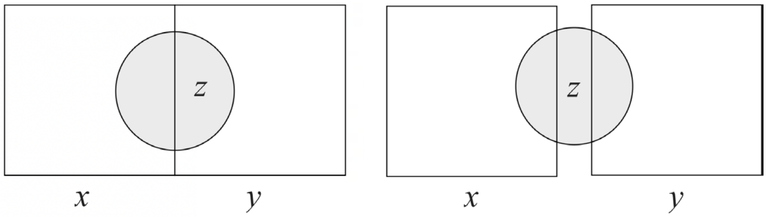
---

[33] Più precisamente, il primitivo di de Laguna è "*x* può connettere *y* e *z*", sottintendendo che *x* è abbastanza largo da connettere *y* e *z* se adeguatamente posizionati, ma il sapore modale di questa nozione è immateriale.

[34] Tentativi dettagliati di assiomatizzazione del primitivo a tre posti di de Laguna si possono oggi trovare in Donnelly (2001, cap. 4) e Giritli (2003), ma lo stesso de Laguna vedeva il suo articolo come una mera appendice alla teoria generale della natura dello spazio che aveva presentato altrove (de Laguna 1922). Bisogna anche notare che de Laguna non condivideva del tutto il progetto di Whitehead, esprimendo seri dubbi riguardo alle sue motivazioni epistemologiche: "Sebbene percepiamo i solidi, non percepiamo nessun insieme astratto di solidi. [...] Accettando l'insieme astratto, andiamo oltre l'esperienza proprio come quando accettiamo il solido senza-lunghezza" (1922b, p. 460). Cfr. anche la recensione di de Laguna a *PNK* (1920).

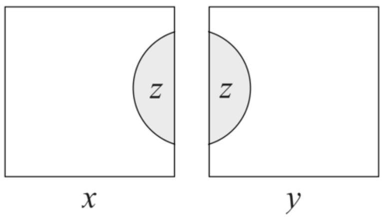
[35] Whitehead recupera immediatamente la relazione ternaria tramite la sua nozione di "connessione mediata", che vale ogniqualvolta due regioni siano entrambe connesse a una terza (*PR*, p. 294, def. 1).

capire l'idea alla base di questa definizione. Quando x e y sono due regioni connesse fra loro, come nello schema a sinistra, possiamo facilmente trovare una regione z che soddisfi le condizioni (i) e (ii). Al contrario, quando x e y non sono connesse, come nello schema a destra, sembrerebbe che ogni z sovrapposto sia a x sia a y debba estendersi almeno in parte anche sul loro complemento mereologico, violando la condizione (ii).



6.

Perché Whitehead non si servì di questa definizione invece di trattare la connessione come relazione primitiva e costruire tutto daccapo? Non ci è dato saperlo. Ma la risposta più ragiobevole è anche la più semplice: la definizione non funziona, come mostra il controesempio nella Figura 7.



7.

Nel contesto di *PNK* e *CN*, configurazioni di questo tipo verrebbero escluse per ragioni di ordine ontologico, dal momento che Whitehead operava chiaramente sotto l'ipotesi che tutti gli eventi – le entità primarie della sua ontologia – sono continui, cioè non costituiti da parti separate. La configurazione della Figura 7 non potrebbe presentarsi per il semplice motivo che la regione z non esisterebbe in quanto discontinua, proprio come non esisterebbe alcun evento corrispondente alla fusione mereologica di x e y.[36] In effetti, la definizione stessa di classe astrattiva dava questo presupposto per scontato, sia in *PNK* e *CN*, sia nella teoria originale di *TRE*. In termini generali, tuttavia, tale presupposto risulta ingiustificato e andrebbe enunciato in maniera esplicita. L'unico modo per escludere il controesempio è di essere espliciti riguardo al requisito che z sia una regione continua, come nel caso della Figura 6. Ma richiedere che una regione sia continua significa richiedere che ogni coppia di parti che la compongono siano connesse, e questa è circolarità bell'e buona.[37]

Dunque Whitehead tratta adesso la relazione di connessione come primitiva. Ogni altro concetto viene introdotto per definizione (*PR*, pp. 294 e sgg.). In particolare, la vecchia relazione di parte viene recuperata in questi termini: x è *parte di* y (e y include, o si estende su, x) se e solo se qualsiasi cosa sia connessa a x è connessa anche a y. Su queste basi, Whitehead definisce immediatamente la corrispondente relazione di *sovrapposizione*, cioè di condivisione di una parte comune, e la relazione non-mereologica di *connessione esterna*, che sussiste fra qualsiasi coppia di entità connesse quando queste non si sovrappongono (quindi, intuitivamente, quando "si toccano" ai confini). Quest'ultima nozione viene poi utilizzata per ottenere il resto dell'apparato extra-mereologico, a iniziare dalla nozione cruciale: x è una parte *non-tangenziale* di y (oppure: y include non-tangenzialmente x) se e solo se x è parte di y e non esiste alcun z connesso esternamente a entrambi. Questa è la controparte della nozione di contenimento di de Laguna, nel senso di "completamente avvolgente", ed è nei termini di questo concetto che Whitehead modificherà infine la sua definizione di classe astrattiva, esattamente come suggerito da de Laguna: un insieme di regioni è una *classe astrattiva* se e solo se (i) è totalmente ordinato dalla relazione di inclusione non-tangenziale e (ii) non esiste alcuna regione inclusa in ogni elemento dell'insieme. Il resto della teoria procede come prima, con la solita definizione di "punto" nei termini di classi di equivalenza di classi astrattive di copertura minima, seguita dalla definizione di "segmento" e da quella di "superficie" (pp. 299–301). In realtà queste definizioni sono offerte in un linguaggio leggermente più efficace, con l'espres-

---

[36] Questa è la ragione per cui alla mereologia di Whitehead manca non solo l'assioma di composizione non ristretta (vedi sopra, n. 23), ma anche la sua variante finitaria più debole. A dire il vero *CN* offre una definizione alternativa di connessione in cui la clausola (i) è rimpiazzata dal requisito più stringente che x e y siano entrambi parte di z (p. 76). Le presenti considerazioni si applicano a questa definizione *mutatis mutandis*.

[37] Sulla indefinibilità della connessione in termini mereologici canonici, si veda Gerla e Miranda (2008, §4). Ovviamente possono esistere altre strade non canoniche; si veda per esempio Mormann (2013).

sione “elemento geometrico” usata come termine evocativo per una classe di equivalenza di classi astrattive e il termine “incidenza” per la relazione che sussiste tra due elementi geometrici A e B quando ogni membro di B è coperto da ogni elemento di A ma non viceversa. Usando questo linguaggio, un punto diventa un elemento geometrico che non ha alcun elemento geometrico incidente, e Whitehead può paragonare con orgoglio la sua definizione alla definizione classica di Euclide del punto come ciò che non ha parti (p. 299).

Va da sé che tutto questo discorso ha bisogno di una caratterizzazione appropriata delle nozioni in questione – quindi, fondamentalmente, della relazione primitiva di connessione – ma a questo riguardo Whitehead è sfortunatamente alquanto sbrigativo. Ci dice che “le definizioni costituiscono la porzione vitale del soggetto” (p. 295), ma poi si limita a fissarne il significato enumerando poche caratteristiche (“presupposti”) che ricadono ben al di sotto di un trattamento assiomatico adeguato:

> Non verrà fatto alcun tentativo di ridurre queste caratteristiche a un minimo logico dal quale il restante possa essere ottenuto per rigida deduzione. (p. 294)

Alcune di queste caratteristiche (per un totale di trentuno) sono perfettamente plausibili, a partire dal requisito che la relazione di connessione sia simmetrica (ma non transitiva) e includa la relazione di parte come caso speciale, da cui segue che la connessione è anche riflessiva. Le altre caratteristiche enumerate da Whitehead, tuttavia, sono scarsamente sufficienti, e includono assunzioni che sono o ridondanti o chiaramente in contrasto con altre. Per esempio, si stipula che la relazione di parte sia transitiva (Assunzione 6), e questa è una banale conseguenza logica della definizione di “parte”. Analogamente, si richiede che la relazione di sovrapposizione sia simmetrica (Assunzione 10), includa la relazione di parte (Assunzione 11), e sia inclusa nella relazione di connessione (Assunzione 12), tutte caratteristiche che derivano banalmente dalla definizione di “sovrapposizione”. D’altro canto, si richiede anche che la relazione di parte sia irriflessiva e asimmetrica (Assunzioni 6 e 7) e questi requisiti sono non solo congiuntamente ridondanti ma in confitto con la definizione (suggerendo che il pensiero di Whitehead oscillasse distrattamente tra parti e parti proprie). Similmente, ci viene detto che la connessione è irriflessiva (Assunzione 4), il che è in evidente contraddizione con quanto detto sopra.

È difficile valutare la piena importanza di queste distrazioni. Secondo Simons (1991, p. 227), una spiegazione clemente potrebbe trovarsi nella storia disordinata della pubblicazione di *PR*, che, come sappiamo dai curatori della “Edizione corretta” del 1978, risultò in centinaia di errori e in altrettante discrepanze tra l'edizione inglese e quella americana (p. v). Whitehead e la casa editrice devono aver lavorato in modo davvero poco coordinato. Nondimeno il testo stampato è tutto ciò che abbiamo, e le sue incongruenze e la mancanza di precisione non possono che lasciarci disorientati. In confronto alle sue prime ricerche, la nuova teoria di Whitehead è certamente più profonda e genuinamente innovativa; come formulazione definitiva del suo punto di vista, i dettagli sono malauguratamente carenti. In particolare, è impressionante che le caratteristiche enumerate da Whitehead non dicano assolutamente nulla in merito al fatto che le regioni della sue classi astrattive (se non *tutte* le regioni, come con gli eventi di *PNK* e *CN*) devono essere continue, cioè auto-connesse, una proprietà che ora può essere facilmente definita. Questo requisito non è necessario per la definizione di "punto". Lo diventa, però, nella definizione di "segmento".

Osservazioni conclusive

Alla luce di queste considerazioni, è difficile dire a che cosa ammonti esattamente la teoria finale di Whitehead. Di conseguenza è difficile dire se essa soddisfi pienamente le condizioni elencate da Broad (1923, p. 19) nel passo citato sopra, il cui adempimento è una *conditio sine qua non* per l'adeguatezza della riforma whiteheadiana della geometria. Ciò nonostante, fin dalla pubblicazione di *PR* molti autori si sono sforzati di fornire i dettagli mancanti, elaborando ricostruzioni formali e rigorose della proposta di Whitehead. Non c'è completo accordo su quali debbano essere tali dettagli, cosicché i prodotti finali divergono significativamente uno dall'altro. Ma è in queste proposte, in ultima analisi, che bisogna cercare delle risposte.

La prima analisi accurata viene da una coppia di articoli di Bowman Clarke, 'A Calculus of Individuals Based on Connection' (1981) e 'Individuals and Points' (1985), che contengono un tentatitvo di assiomatizzazione completa della teoria presentata in *PR*. Contribuiti successivi di questo tipo si trovano anche nei lavori di Gerla e dei suoi collaboratori (Biacino e Gerla 1991; Gerla e Tortora 1992; Gerla e Miranda 2008) e in Bostock (2010), che fornisce anche un'analisi dettagliata dell'applicazione della teoria da parte di Russell in ambito temporale. (Oltre alla "spiegazione preliminare" in *Our Knowledge of the External World*, Russell impiega una variante del metodo di Whitehead per la costruzione dei punti-istanti in *The Analysis of Matter*, pubblicato nel 1927, e poi – nella rigida notazione dei *Principia* – nel suo articolo del 1936 'On

Order in Time', e vi torna nuovamente in *Human Knowledge*, 1948.)[38] A questo riguardo merita inoltre di essere citata l'assiomatizzazione della geometria senza-punti di Andrzej Grzegorczyk (1960), che per quanto sviluppata indipendentemente risulta molto simile alla ricostruzione di Clarke della teoria di Whitehead (Biacino e Gerla 1991).[39] Infine, il 'Region Connection Calculus' elaborato da Cohn e collaboratori (Randell *et al.* 1992; Cohn *et al.* 1997) e la 'Commonsense Geometry' di Asher e Vieu (1995), che si sono rivelati molto influenti nel trattamento computazionale del ragionamento spaziale senza-punti, possono a loro volta essere visti come derivanti dalla teoria di Whitehead nello spirito di una teoria assiomatica rigorosa ed efficiente.[40]

Più in generale, è qui che lo studio astratto delle strutture di connessione e lo sviluppo delle cosiddette algebre di contatto all'interno della crescente letteratura di mereotopologia diventa significativo, non solo nella prospettiva fondativa di una geometria e di una topologia senza-punti, ma anche riguardo al compito specifico di irreggimentare la teoria originale di Whitehead (si veda per es. Vakarelov 2007). Quest'area di ricerca è ampiamente discussa nel capitolo di Gerla (2021), al quale rimandiamo dunque per eventuali dettagli e riferimenti. Da parte nostra, ci limiteremo a concludere con un paio di brevi considerazioni.

La prima considerazione riguarda il quadro mereotopologico complessivo che emerge dalle successive elaborazioni della teoria di Whitehead. Abbiamo visto che non si può ricavare la topologia a partire dalla mereologia, almeno non definendo la relazione di connessione nei termini di quella di parte come in *PNK* e *CN*. Questo è il motivo per cui *PR* tratta la connessione come relazione primitiva. Ma abbiamo anche visto che *PR* definisce la relazione di parte nei termini di quella di connessione, ricavando tutta mereologia a partire dalla topologia. Quindi, benché nella direzione opposta, Whitehead finisce comunque riducendo una cosa all'altra: un primitivo è sufficiente. È piuttosto sorprendente che egli non offra alcun commento filosofico a questa mossa: si limita ad accreditare de Laguna (che su questo aspetto non si esprime) e a notare che la definizione "costituisce un'importante aggiunta alla teoria dell'estensione" (*PR*, p. 294). Nonostante ciò, proprio questa aggiunta, e la riduzione concettuale che ne deriva, può essere vista come uno dei maggiori

38 Sulle specificità dell'elaborazione di Russell si vedano Anderson (1989), Mormann (2009) e Maclean (2012).

39 Sulla assiomatizzazione di Grzegorczyk, la cui relazione primitiva non è la connessione ma la sua negazione, si veda anche l'accurato studio di Gruszczyński e Pietruszczak (2018, 2019).

40 Esistono oggi numerose varianti di queste teorie. Per un quadro generale si rimanda a Hahmann e Grüninger (2012).

risultati di Whitehead, e la sua influenza sulla letteratura successiva si è estesa ben oltre l'applicazione alle geometrie senza-punti. (L'articolo di Clarke del 1981 è stato particolarmente importante a questo riguardo.)

La seconda considerazione riguarda invece le numerose questioni fondamentali che Whitehead lascia irrisolte, in particolare quelle riguardanti i modelli intesi della sua teoria. La teoria è senza-punti, il che significa che formalmente le sue variabili dovrebbero spaziare esclusivamente su regioni estese, quindi su regioni con parti non-tangenziali. Eppure non tutte le regioni estese sono uguali; c'è spazio per distinzioni interessanti? Per esempio, la teoria riconosce ancora la distinzione topologica classica tra regioni aperte e regioni chiuse? Riconosce ancora la distinzione tra regioni regolari e regioni irregolari, per es. regioni a cui manchi ciò che verrebbe comunemente descritto come un singolo punto interno? Alcuni seguaci di Whitehead sostengono che queste distinzioni siano inintelligibili in una prospettiva senza-punti. Randell *et al.* (1992), per esempio, le escludono in partenza, e Bostock (2010) le esclude per argomentazione. Tuttavia non tutti sono d'accordo, iniziando da Clarke (1981), che fornisce istruzioni dettagliate su come recuperare tutte le distinzioni topologiche standard all'interno dell'apparato senza-punti di *PR*. (Sia *l'interno* di una regione la fusione mereologica delle sue parti non-tangenziali e sia la sua *chiusura* la fusione di tutto ciò che non è connesso con l'interno del suo complemento, definito a sua volta come la fusione di tutte le regioni che non si sovrappongono alla regione stessa. A questo punto tutte le definizioni possono facilmente essere ottenute mereotopologizzando le definizioni standard.) Certo, recuperarle formalmente non significa molto; le distinzioni potrebbero ancora collassare. Ma collassano? C'è da aspettarsi che collassino?

Ahimè, Whitehead non ce lo dice. In *PNK* troviamo un principio che sembrerebbe aiutarci. Non si trova elencato tra i postulati mereologici ufficiali citati in precedenza e non segue da essi. Nonostante ciò, Whitehead lo afferma esplicitamente (p. 102), quindi dobbiamo pensare che vi facesse affidamento. Il principio afferma che quando qualcosa, x, ha una parte propria, y, deve avere anche una parte propria z che non si sovrappone a y.[41] Se questo prin-

[41] Nella terminologia corrente, il principio in questione è noto come "supplementazione debole" (seguendo Simons, 1987, p. 28) ed è un tratto distintivo della mereologia classica. Che non segua dai postulati ufficiali di Whitehead era una delle principali critiche a *PNK* nel testo di Leśniewski menzionato alla nota 21 (si veda 1927–1931, parte IV, pp. 287/260 e sgg.). Sui dettagli della dimostrazione di indipendenza di Leśniewski, si veda anche Sinisi (1966). Sulle mereologie che violano la supplementazione debole, si rimanda a Cotnoir e Varzi (2019, cap. 4).

cipio valesse senza restrizioni, allora la risposta alla nostra domanda sarebbe affermativa: le distinzioni topologiche standard collassano. Per esempio, una regione aperta dovrebbe essere una parte propria (non-tangenziale) della sua chiusura, ma non può esserci alcun *z* che faccia la differenza: gli unici candidati dovrebbero venire dai confini della chiusura, e nella geometria di Whitehead *non ci sono* elementi di confine. Tuttavia non è chiaro se il principio in questione debba effettivamente valere senza restrizioni all'interno della più ricca struttura mereotopologica di *PR*. Sicuramente la relazione di parte non-tangenziale è un caso specifico della relazione di parte propria. Ma precisamente per questa ragione potrebbe richiedere un trattamento speciale, che potrebbe violare il principio in questione. A questo riguardo Whitehead non dice nulla. Le assunzioni dichiarate o chiaramente presupposte in *PR* garantiscono che il principio continui a valere per le parti non-tangenziali di quelle regioni che non sono esternamente connesse con nessun'altra regione (cf. Clarke 1981, teorema T0.31), ma proprio questo è il punto. Intuitivamente, ciò significa che il principio continua a valere per quelle regioni che andrebbero classificate come aperte; la domanda è se continui a valere per tali regioni in relazione ad altre, incluse quelle che andrebbero classificate come loro chiusure.

A conti fatti, la mancanza di chiare affermazioni su questi temi è forse la carenza più spiacevole dell'ultima elaborazione della teoria di Whitehead. È ben vero che questi problemi potrebbero non avere importanza per comprendere il metodo dell'"astrazione estensiva" in quanto tale. Essi sono, tuttavia, della massima importanza se vogliamo apprezzare fino in fondo i presupposti e i dettagli tecnici – e il raggio di applicazione – della concezione generale dello spazio su cui il metodo riposa.

Bibliografia

Anderson, C., 1989, 'Russell on Order in Time', in C. Savage, C. Anderson, e H. Feigl (a cura di), *Rereading Russell: Essays on Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*, Minneapolis (MN), University of Minnesota Press, pp. 249–263.

Asher, N. e Vieu, L., 1995, 'Toward a Geometry of Common Sense: A Semantics and a Complete Axiomatization of Mereotopology', in C. S. Mellish (a cura di), *Proceedings of the 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence*, San Mateo (CA), Morgan Kaufmann, pp. 846–852.

Bennett, B., 2001, 'A Categorical Axiomatisation of Region-Based Geometry', *Fundamenta Informaticae*, 46: 145–158

Betti, A. e Loeb, I., 2012, 'On Tarski's Foundations of the Geometry of Solids', *The Bulletin of Symbolic Logic*, 18: 230–260.

Biacino, L. e Gerla, G., 1991, 'Connection Structures', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 32: 242–247.

Biacino, L. e Gerla, G., 1996, 'Connection Structures: Grzegorczyk's and Whitehead's Definitions of Point', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 37: 431–439.

Borgo, S., 2013, 'Spheres, Cubes and Simplexes in Mereogeometry', *Logic and Logical Philosophy*, 22: 255–293.

Borgo, S. e Masolo, C., 2010, 'Full Mereogeometries', *The Review of Symbolic Logic*, 3: 521–567.

Bostock, D., 2010, 'Whitehead and Russell on Points', *Philosophia Mathematica*, 18: 1–52.

Boyer, C. B., 1968, *A History of Mathematics*, New York: Wiley.

Broad, C. D., 1920, Critical Notice of Whitehead (1919), *Mind*, 29: 216–231.

Broad, C. D., 1923, *Scientific Thought*, London, Kegan Paul & Co.

Cantor, G., 1872, 'Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen', *Mathematische Annalen*, 5: 123–132.

Carnap, R., 1928, *Der Logische Aufbau der Welt*, Leipzig, Meiner. Trad. inglese di R. A. George: *The Logical Structure of the World* (con *Pseudoproblems in Philosophy*), Berkeley (CA), University of California Press, 1967.

Clarke, B. L., 1981, 'A Calculus of Individuals Based on Connection', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22: 204–218.

Clarke, B. L., 1985, 'Individuals and Points', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 26: 61–67.

Clay, R. E., 2017, 'Note on the Geometry of Solids', *Logique et Analyse*, 60: 449–463.

Cohn, A. G., Bennett, B., Gooday, J., e Gotts, N. M., 1997, 'Representing and Reasoning with Qualitative Spatial Relations about Regions', in O. Stock (a cura di), *Spatial and Temporal Reasoning*, Dordrecht, Kluwer, pp. 97–134.

Coppola, C., Gerla, G., e Miranda, A., 2010, 'Point-Free Foundation of Geometry and Multivalued Logic', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 51: 383–405.

Cotnoir, A. J. e Varzi, A. C., 2019, *Mereology*, Oxford, Oxford University Press (forthcoming).

de Laguna, T., 1920, Review of Whitehead (1919), *The Philosophical Review*, 29: 269–275.

de Laguna, T., 1921, 'Extensive Abstraction: A Suggestion', *The Philosophical Review*, 30: 216–218.

de Laguna, T., 1922, 'The Nature of Space', *The Journal of Philosophy*, 19: 393–407 e 421–440.

de Laguna, T., 1922b, 'Point, Line, and Surface, as Set of Solids', *The Journal of Philosophy*, 19: 449–461.

Desmet, R., 2009, 'The Serpent in Russell's Paradise', in B. Van Kerkhove (a cura di), *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics*, Singapore, World Scientific, pp. 207–221.

Desmet, R., 2010, 'Whitehead's Relativity', in R. Desmet e M. Weber (a cura di), *Whitehead: The Algebra of Metaphysics*, Louvain, Chromatika, pp. 365–373.

Donnelly, M. B., 2001, *An Axiomatization of Common-Sense Geometry*, Ph.D. Dissertation, Austin (TX), University of Texas.

Durand, G., 2007, *Des événements aux objets. La méthode de l'abstraction extensive chez Alfred North Whitehead,* Frankfurt, Ontos.

Durand, G., 2008, The Method of Extensive Abstraction. The Construction of Objects', in M. Weber e W. Desmond (a cura di), *Handbook of Whiteheadian Process Thought,* Frankfurt, Ontos, vol. 1, pp. 645–652.

Durand, G., 2008b, 'Whitehead et Russell: la discorde de 1917', *Noesis*, 13: 237–250.

Eames, E. R., 1989, *Bertrand Russell's Dialogue with His Contemporaries*, Carbondale (IL), Southern Illinois University Press.

Fitzgerald, J. A., 1979, *Alfred North Whitehead's Early Philosophy of Space and Time*, Washington (DC), University Press of America.

Frege, G., 1976, *Wissenshaftlicher Briefwechsel* (a cura di G. Gabriel, H. Hermes, F. Kambartel, C. Thiel, e A. Veraart), Hamburg, Meiner. Trad. inglese (parziale) di H. Kaal: *Philosophical and Mathematical Correspondence*, Oxford, Blackwell, 1980.

Gerla, G., 2021, 'Point-Free Continuum', in S. Shapiro e G. Hellman (a cura di), *The History of Continua: Philosophical and Mathematical Perspectives,* Oxford University Press, pp. 427–475.

Gerla, G. e Gruszczyński, R., 2017, 'Point-Free Geometry, Ovals, and Half-Planes', *The Review of Symbolic Logic*, 10: 237–258.

Gerla, G. e Miranda, A., 2008, 'Mathematical Features of Whitehead's Point-Free

Geometry', in M. Weber e W. Desmond (a cura di), *Handbook of Whiteheadian Process Thought,* Frankfurt, Ontos, vol. 2, pp. 119–130.

Gerla, G. e Paolillo, B., 2010, 'Whitehead's Pointfree Geometry and Diametric Posets', *Logic and Logical Philosophy*, 19: 289–308.

Gerla, G. e Tortora, R., 1992, 'La relazione di connessione in A. N. Whitehead: aspetti matematici', *Epistemologia*, 15: 351–364.

Gerla, G. e Tortora, R., 1996, 'Dissezioni e intersezioni di regioni in A. N. Whitehead', *Epistemologia*, 19: 289–308.

Giritli, M., 2003, 'Who Can Connect in RCC?', in A. Günter, R. Kruse, e B. Neumann (a cura di), *Advances in Artificial Intelligence. Proceedings of the 26th Annual German Conference on AI*, Berlin, Springer, pp. 565–579.

Grattan-Guinness, I., 1975, 'The Royal Society's Financial Support of the Publication of Whitehead and Russell's *Principia Mathematica*', *Notes and Records of the Royal Society of London*, 30: 89–104.

Grattan-Guinness, I., 2002, 'Algebras, Projective Geometry, Mathematical Logic, and Constructing the World: Intersections in the Philosophy of Mathematics of A. N. Whitehead', *Historia Mathematica*, 29: 427–462

Grünbaum, A., 1953, 'Whitehead's Method of Extensive Abstraction', *British Journal for the Philosophy of Science*, 4: 215–226.

Gruszczyński, R. e Pietruszczak, A., 2008, 'Full Development of Tarski's Geometry of Solids', *The Bulletin of Symbolic Logic*, 14: 481–540.

Gruszczyński, R. e Pietruszczak, A., 2018, 'A Study in Grzegorczyk Point-Free Topology, Part I: Separation and Grzegorczyk Structures', *Studia Logica*, 106: 1197–1238.

Gruszczyński, R. e Pietruszczak, A., 2019, 'A Study in Grzegorczyk Point-Free Topology, Part II: Spaces of Points', *Studia Logica*, 107: 809–843.

Grzegorczyk, A., 1960, 'Axiomatization of Geometry without Points', *Synthese*, 12: 228–235.

Günther, H., 2005, *Die Prozessphilosophie Alfred North Whiteheads und die Physik des 20. Jahrhunderts*, Aachen, Shaker.

Hahmann, T. e Grüninger, M., 2012, 'Region-Based Theories of Space: Mereotopology and Beyond', in S. M. Hazarika (a cura di), *Qualitative Spatio-Temporal Representation and Reasoning: Trends and Future Directions*, Hershey (PA), IGI Global, pp. 1–62.

Hampe, M., 1991, 'Einleitung: Whitehead's Entwicklung einer Theorie der Ausdehnung', in M. Hampe e H. Maaßen (a cura di), *Prozeß, Gefühl und Raum-Zeit. Materialien zu Whitehead's "Prozeß und Realität", Band 1*, Frankfurt, Suhrkamp, pp. 220–243.

Harrell, M., 1988, 'Extension to Geometry of *Principia Mathematica* and Related Systems II', *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*, 8: 140–160.

Heath, T. L., 1908, *The Thirteen Books of Euclid's Elements, with Introduction and Commentary* (3 vols.), Cambridge, Cambridge University Press.

Hilbert, D., 1899, *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig, Teubner. Trad. inglese di E. Townsend: *The Foundations of Geometry*, La Salle (IL), Open Court, 1902.

Hobson, E. W. e Love, A. E. H. (a cura di), 1913, *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians* (2 vols.), Cambridge, Cambridge University Press.

Huntington, E. V., 1913, 'A Set of Postulates for Abstract Geometry, Expressed in Terms of the Simple Relation of Inclusion', *Mathematische Annalen*, 73: 522–559.

Hurley, P. J., 1979, 'Whitehead's *Relational Theory of Space*: Text, Translation, and Commentary', *Philosophy Research Archives*, 5: 676–739.

Hurley, P. J., 1981, Review of Fitzgerald (1979), *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 17: 77–83.

Kraus, E. M., 1979, *The Metaphysics of Experience: A Companion to Whitehead's Process and Reality*, New York, Fordham University Press. Second edition: 1998.

Landini, G., 2016, 'Whitehead *Versus* Russell', in S. Costreie (a cura di), *Early Analytic Philosophy. New Perspectives on the Tradition*, Cham, Springer, pp. 127–160.

Lawrence, N., 1950, 'Whitehead's Method of Extensive Abstraction', *Philosophy of Science*, 17: 142–163.

Lawrence, N., 1956, *Whitehead's Philosophical Development. A Critical History of the Background of Process and Reality*, Berkeley (CA), University of California Press.

Leclercq, B., 2011, 'Looking for New Mathematical Concepts for the Material World: Whitehead's Investigations into Formal Ontology', *Logique et Analyse*, 54: 211–224.

Lenzen, V. F., 1926, 'Scientific Ideas and Experience', *University of California Publications in Philosophy*, 8: 173–190.

Leśniewski, S., 1916, *Podstawy ogólnej teoryi mnogości. I*, Moskow, Prace Polskiego Koła Naukowego w Moskwie, Sekcya matematyczno-przyrodnicza. Trad. inglese di D. I. Barnett: 'Foundations of the General Theory of Sets. I', in S. Leśniewski, *Collected Works* (a cura di S. J. Surma, J. T. Srzednicki, D. I. Barnett, e F. V. Rickey), Dordrecht, Kluwer, 1992, vol. 1, pp. 129–173.

Leśniewski, S., 1927–1931, 'O podstawach matematyki'. Przegląd Filozoficzny, 30: 164–206; 31: 261–291; 32: 60–101; 33: 77–105; 34: 142–170. Trad. inglese di D. I. Barnett: 'On the Foundations of Mathematics', in S. Leśniewski, *Collected Works* (see previous item), vol. 1, pp. 174–382.

Lewis, D. K., 1991, *Parts of Classes*, Oxford, Blackwell.

Lobačevskij, N. I., 1835–1938, 'Novye načala geometrii s polnoĭ teorieĭ parallel'nyh', *Učenye zapiski Kazanskogo Imperatorskogo universiteta*, 1835/III: 3–48; 1836/II: 3–98; 1836/III: 3–50; 1837/I: 3–97; 1838/I: 3–124; 1838/III: 3–65. Trad. inglese (dell'Introduzione) di G. B. Halsted: *New Principles of Geometry with Complete Theory of Parallels*, Austin (TX), Neomon, 1897.

Lowe, V., 1950, 'Whitehead's Philosophy of Science', in V. Lowe, C. Hartshorne, e A. H. Johnson, *Whitehead and the Modern World. Science, Metaphysics, and Civilization*, Boston (MA), Beacon, pp. 3–24.

Lowe, V., 1962, *Understanding Whitehead*, Baltimore (MD), Johns Hopkins University Press.

Lowe, V., 1982, 'Alfred North Whitehead: A Biographical Perspective', *Process Studies*, 12: 137–47.

Maclean, G. K., 2012, 'Ramsey's Influence on Russell's Construction of Points', *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*, 32: 42–54.

Mays, W., 1952, 'Whitehead's Theory of Abstraction', *Proceedings of the Aristotelian Society*, 52: 95–118.

Mays, W., 1959, *The Philosophy of Whitehead*, London, Allen & Unwin.

Mays, W., 1961, 'The Relevance of "On Mathematical Concepts of the Material World" to Whitehead's Philosophy', in I. Leclerc (a cura di), *The Relevance of Whitehead*, London, Allen & Unwin, pp. 235–260.

Mays, W., 1977, *Whitehead's Philosophy of Science and Metaphysics: An Introduction to his Thought*, The Hague, Nijhoff.

Miah, S., 1987, 'The Emergence of Russell's Logical Construction of Physical Objects', *Russell: The Journal of Bertrand Russell Studies*, 7: 11–24.

Mormann, T., 2009, 'Russell's Many Points', in A. Hieke e H. Leitgeb (a cura di), *Reduction, Abstraction, Analysis. Proceedings of the 31th International Ludwig Wittgenstein-Symposium*, Frankfurt, Ontos. pp. 239–258.

Mormann, T., 2013, 'Heyting Mereology as a Framework for Spatial Reasoning', *Axiomathes*, 23: 137–164.

Murphy, A. E., 1926, 'Ideas and Nature', *University of California Publications in Philosophy*, 8: 191–214.

Nicod, J., 1924, *La géométrie dans le monde sensible*, Paris, Alcan; Trad. inglese di P. P. Wiener: 'Geometry in the Sensible World', in J. Nicod, *Foundations of Geometry and Induction*, London, Routledge & Kegan Paul, 1930, pp. 3–192 (tradotto, lo stesso titolo, anche da J. Bell e M. Woods, in J. Nicod, *Geometry and Induction*, Berkeley (CA), University of California Press, 1970, pp. 1–155.

Palter, R., 1960, *Whitehead's Philosophy of Science*, Chicago (IL), University of Chicago Press,

Playfair, J., 1795, *Elements of Geometry*, Edinburgh, Bell & Bradfute.

Randell, D. A., Cui, Z., e Cohn, A. G., 1992, 'A Spatial Logic Based on Regions and Connection', in B. Nebel, W. Swartout, e C. Rich (a cura di), *Principles of Knowledge Representation and Reasoning. Proceedings of the 3rd International Conference*, Los Altos (CA), Morgan Kaufmann, pp. 165–176.

Reymond, A. F., 1914, 'Le Premier Congrès de Philosophie mathématique. Paris 6–8 avril 1914', *L'enseignement mathématique*, 16: 370–378.

Ridder, L., 2001, 'Whiteheads Theorie der Ausdehnung', *Logical Analysis and History of Philosophy*, 4: 143–172.

Ridder, L., 2002, *Mereologie: Ein Beitrag zur Ontologie und Erkenntnistheorie*, Frankfurt, Klostermann.

Ringel, C. M., 2008, 'Extension in *PR* Part IV', in M. Weber e W. Desmond (a cura di), *Handbook of Whiteheadian Process Thought*, Frankfurt, Ontos, vol. 2, pp. 131–156.

Ross, S. D., 1983, *Perspective in Whitehead's Metaphysics*, New York, SUNY Press.

Russell, B., 1901, 'Is Position in Time and Space Absolute or Relative?', *Mind*, 10: 293–317.

Russell, B., 1914, *Our Knowledge of the External World*, London, Allen & Unwin.

Russell, B., 1914b, 'The Relation of Sense-Data to Physics', *Scientia*, 16: 1–27.

Russell, B., 1924, 'Logical Atomism', in J. H. Muirhead (a cura di), *Contemporary British Philosophy. Personal Statements*, London, Allen & Unwin, pp. 356–383.

Russell, B., 1927, *The Analysis of Matter*, London, Allen & Unwin.

Russell, B., 1936, 'On Order in Time', *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 32: 216–228.

Russell, B., 1948, *Human Knowledge: Its Scope and Limits*, London: Allen & Unwin.

Russell, B., 1948b, 'Whitehead and *Principia Mathematica*', *Mind*, 57: 137–138.

Russell, B., 1968, *The Autobiography of Bertrand Russell, Volume II: 1914–1944*, London, Allen & Unwin.

Schaffer, J., 2010, 'Monism: The Priority of the Whole', *The Philosophical Review*, 119: 31–76.

Shapiro, S., 2005, 'Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Controversy: The Status of Meta-mathematics', *Philosophia Mathematica* (Series III), 13: 61–77.

Sitek, G., 2017, 'The Notion of the Diameter of Mereological Ball in Tarski's Geometry of Solids', *Logic and Logical Philosophy*, 26: 531–562.

Simons, P. M., 1987, *Parts. A Study in Ontology*, Oxford, Clarendon.

Simons, P. M., 1991, 'Whitehead und die Mereologie', in M. Hampe e H. Maaßen (a cura di), *Die Gifford Lectures und ihre Deutung. Materialien zu Whiteheads 'Prozess und Realität', Band 2*, Frankfurt, Suhrkamp, pp. 369–388. Trad. inglese (con aggiunte): 'Whitehead and Mereology', in G. Durand e M. Weber (a cura di), *Les principes de la connaissance naturelle d'Alfred North Whitehead*, Frankfurt, Ontos, 2007, pp. 215–233.

Sinisi, V. F., 1966, 'Leśniewski's Analysis of Whitehead's Theory of Events', *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 7: 323–327.

Śniatycki, A., 1968, *An Axiomatics of Non-Desarguean Geometry Based on the Half-Plane as the Primitive Notion*, Warsaw, Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Spector, M., 1975, 'Russell's Maxim and Reduction as Replacement', *Synthese*, 32: 135–176.

Srzednicki, J. T. J. e Stachniak, Z. (a cura di), 1988, *S. Leśniewski's Lecture Notes in Logic*, Dordrecht, Kluwer.

Stebbing, S. L., 1930, *A Modern Introduction to Logic*, London, Methuen.

Tanaka, Y., 1987, 'Einstein and Whitehead: The Principle of Relativity Reconsidered', *Historia Scientiarum*, 32: 43–61.

Tarski, A., 1929, 'Les fondements de la géométrie des corps', *Księga Pamiątkowa Pierwszkego Polskiego Zjazdu Matematycznego*, suppl. to *Annales de la Société Polonaise de Mathématique*, 7: 29–33. Trad. inglese (con aggiunte) di J. H. Woodger: 'Foundations of the Geometry of Solids', in A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics. Papers from 1923 to 1938*, Oxford, Clarendon, pp. 24–29.

Tarski, A., 1935, 'Zur Grundlegung der Booleschen Algebra. I', *Fundamenta Mathematicae*, 24: 177–198. Trad. inglese (con aggiunte) di J. H. Woodger: 'On the Foundations of Boolean Algebra', in A. Tarski, *Logic, Semantics, Metamathematics* (see previous item), pp. 320–341.

Ushenko, A. P., 1949, 'Einstein's Influence on Philosophy', in P. A. Schilpp (a cura di), *Albert Einstein: Philosopher-Scientist*, Evanston (IL), Northwestern University Press, pp. 632–645.

Vakarelov, D., 2007, 'Region-based Theory of Space: Algebras of Regions, Representation Theory, and Logics', in D. M. Gabbay, S. G. Goncharov, e M. Zakharyaschev (a cura di), *Mathematical Problems from Applied Logic. Logics for the XXIst Century*, Berlin, Springer, vol. 2, pp. 267–348.

von Neumann, J., 1960, *Continuous Geometry*, Princeton, Princeton University Press.

von Ranke, O., 1997, *Whiteheads Relativitätstheorie*, Regensburg, Roderer.

Vuillemin, J., 1971, *La logique et le monde sensible. Étude sur les théories contemporaines de l'abstraction*, Paris, Flammarion.

Whitehead, A. N., 1906, 'On Mathematical Concepts of the Material World', *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A*, 205: 465–525 (read before the Royal Society on September 7, 1905).

Whitehead, A. N., 1906b, *The Axioms of Projective Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1907, *The Axioms of Descriptive Geometry*, Cambridge, Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1916, 'La théorie relationniste de l'espace', *Revue de Métaphysique et de Morale*, 23: 423–454. Trad. inglese di P. J. Hurley: 'The Relational Theory of Space', in Hurley (1979), pp. 712–741.

Whitehead, A. N., 1916b, 'Space, Time, and Relativity', *Proceeding of the Aristotelian Society*, 16: 104–132.

Whitehead, A. N., 1916c, 'The Organisation of Thought', *Science*, 44: 409–419.

Whitehead, A. N., 1917, 'The Anatomy of Some Scientific Ideas', cap. VII di *The Organisation of Thought, Educational and Scientific*, London, Williams & Norgate, pp. 134–190.

Whitehead, A. N., 1919, *An Enquiry Concerning the Principles of Natural Knowledge*, Cambridge, Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1919b, 'Time, Space, and Material: Are They, and If so in What Sense, the Ultimate Data of Science?', *Proceedings of the Aristotelian Society, Supplementary Volumes*, 2: 44–57.

Whitehead, A. N., 1920, *The Concept of Nature*, Cambridge, Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1920b, 'Einstein's Theory: An Alternative Suggestion', *The Times Educational Supplement*, February 12, p. 83.

Whitehead, A. N., 1922, *The Principle of Relativity, with Applications to Physical Science*, Cambridge, Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1926, *Science and the Modern World*, Cambridge: Cambridge University Press.

Whitehead, A. N., 1929, *Process and Reality. An Essay in Cosmology*, Cambridge, Cambridge University Press. Corrected edition (a cura di D. R. Griffin e D. W. Sherburne): New York, The Free Press, 1978.

Whitehead, A. N., 1934, 'Indication, Classes, Numbers, Validation', *Mind*, 43: 281–297.

Whitehead, A. N. e Russell, B., 1910–1913, *Principia Mathematica*, Cambridge, Cambridge University Press (Volume I: 1910; Volume II: 1912; Volume III: 1913). Second edition: 1925.

ISSN 1124-0350